ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ АРХАНГЕЛЬСКОЙ ОБЛАСТИ
«МИРНИНСКИЙ ПРОМЫШЛЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО

ОУД.03 МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА; ГЕОМЕТРИЯ

для специальности: 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

2017 г.

Методические рекомендации для ОУД.03 Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия разработаны для выполнения лабораторных работ и составлены в соответствии с рабочей программой и учебным планом по специальности 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы».

Организация-разработчик: государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Архангельской области «Мирнинский промышленно-экономический техникум»

Разработчики:
Пивоварова Т. В., преподаватель

ОДОБРЕНЫ цикловой комиссией общеобразовательных дисциплин	Составлены в соответствии с требованиями ФГОС по специальности среднего профессионального образования 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы» и учебным планом
Председатель цикловой комиссии С. С. Ковалева	Заместитель директора техникума по учебной работе М.Н.Венедиктова

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка

Методические указания к практическим работам по дисциплине ОУД.03 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия (далее «Математика») предназначены для студентов по направлению подготовки специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы.

Цель методических указаний: оказание помощи студентам в выполнении практических работ по дисциплине «Математика».

Настоящие методические указания содержат практические работы, которые позволят студентам закрепить теорию по наиболее сложным разделам курса.

Описание каждой практической работы содержит: тему, цели работы, порядок выполнения работы, а так же перечень контрольных вопросов, с целью выявить и устранить недочёты в освоении рассматриваемой темы. Для получения дополнительной, более подробной информации по изучаемым вопросам, приведено учебно-методическое и информационное обеспечение.

Практическое занятие по теме «Иррациональные уравнения и неравенства»

Цель: обобщение теоретических знаний, необходимых для решения иррациональных уравнений и неравенств; отработка навыков решения иррациональных уравнений и неравенств; развитие внимания, логического мышления для сознательного восприятия учебного материала.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Определение: Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют иррациональными уравнениями.

Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению путём возведения в степень обеих частей уравнения. При возведении обеих частей уравнения в чётную степень возможно появление посторонних корней. Поэтому следует проверить найденные корни подстановкой в исходное уравнение.

Пример 1. $\sqrt{x^2-5} = 2$.

Решение: Возведём обе части этого уравнения в квадрат

$\left(\sqrt{x^2-5}\right)^2 = 2^2$, получим

$x^2 - 5 = 4$; откуда следует, что

$x^2 = 9$, т.е.

$x = 3$ или $x = -3$. Проверим, что полученные числа являются решениями уравнения. При подстановке их в данное уравнение получаются верные равенства $\sqrt{3^2-5} = 2$ и $\sqrt{(-3)^2-5} = 2$. Следовательно, $x = 3$ и $x = -3$ – решения данного уравнения.

Ответ: -3; 3

Пример 2. $\sqrt{x} = x - 2$.

Решение: Возведя в квадрат обе части уравнения, получим

$(\sqrt{x})^2 = (x-2)^2$ или

$x = x^2 - 4x + 4$. После преобразований приходим к квадратному уравнению

$x^2 - 5x + 4 = 0$, решая квадратное уравнения получим корни:

$x = 1$ и $x = 4$.

Проверим, являются ли найденные числа решениями данного уравнения:

$x = 4$, $\sqrt{4} = 4 - 2$, т.е. 4 – решение данного уравнения;

$x = 1$, $\sqrt{1} = 1 - 2$, т.к. в правой части получаем – 1, а в левой части число 1, говорят, что это *посторонний корень*.

Следовательно, ответ 4.

Иногда удобнее решать иррациональные уравнения, используя равносильные переходы.

Пример 3. $\sqrt{x-2} = x - 8$.

Решение: По определению $\sqrt{x-2}$ - это такое неотрицательное число, квадрат которого равен подкоренному выражению. Другими словами, уравнение $\sqrt{x-2} = x - 8$ равносильно системе

$\begin{cases} x-2=(x-8)^2 \\ x-8 \ge 0 \end{cases}$. Решая первое уравнение системы, равносильное уравнению

$x^2 - 17x + 66 = 0$, получим корни

$x = 11$ и $x = 6$, но условие $x - 8 \ge 0$ выполняется только для $x = 11$. Поэтому данное уравнение имеет один корень $x = 11$.

Ответ: 11.

Определение: Неравенства, в которых под знаком корня содержится переменная, называют иррациональными неравенствами.

Решение иррациональных неравенств сводится к переходу от иррационального к рациональному неравенству путём возведения в степень обеих частей неравенства.

Достаточно часто при решении иррациональных неравенств после преобразований получают неравенство вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$. В этом случае обе части неравенства положительны и их можно возводить в квадрат. Возведение обеих частей в квадрат в общем случае позволяет получить неравенство, которое является следствием данного. Чтобы отсеять посторонние решения находят ОДЗ исходного (данного) неравенства и находят пересечение этих множеств.

Пример 4. Решить иррациональное неравенство $\sqrt{20-x} > \sqrt{x+1}$

Решение:

1) Найдем ОДЗ.

$x + 1 \ge 0$ и $20 - x \ge 0$;

$-1 \le x \le 20$, следовательно, ОДЗ: $[-1; 20]$ (1)

2) Возведём обе части неравенства в квадрат:

$20 - x > x + 1$;

$2x < 19$;

$x < 9{,}5$, следовательно, решение этого неравенства

$(-\infty; 9{,}5)$ (2).

3) Найдем пресечение множеств (1) и (2), это будет множество $[-1; 9{,}5)$.

Ответ: $[-1; 9{,}5)$

Можно поступить иначе, сразу заменить исходное неравенство системой неравенств и решать полученную систему неравенств: $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} = \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$. Заметим, что $f(x) > g(x)$ и $g(x) \ge 0$, значит в силу транзитивного свойства неравенств, всюду, где выполняются указанные неравенства, $f(x) \geq 0$ и поэтому систему можно заменить другой системой $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$. Такая замена существенно упрощает решение иррационального уравнения.

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{4-x^2} > \sqrt{x+5}$

Решение:

$$\begin{cases} 4-x^2 > x+5 \\ x+5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x+1 < 0 \\ x \geq -5 \end{cases}$$

Квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ имеет положительный старший коэффициент и отрицательный дискриминант, следовательно, он принимает только положительные значения, а это значит, что неравенство $x^2 + x + 1 < 0$; решений не имеет. Решение системы есть пустое множество.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{x^3+x^2+x+2} > \sqrt{x^2+x+10}$

Решение: Составим систему неравенств

$$\begin{cases} x^3+x^2+x+2 \geq 0 \\ x^2+x+10 \geq 0 \\ x^3+x^2+x+2 > x^2+x+10 \end{cases}$$

Так как первое неравенство является следствием второго и третьего неравенств, его можно опустить.

$$\begin{cases} x^2+x+10 \geq 0 \\ x^3+x^2+x+2 > x^2+x+10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x+10 \geq 0 \\ x^3 > 8 \end{cases}$$

У квадратного трехчлена $a = 1$ и $D = -39$, следовательно, он принимает положительные значения на всей области определения.

$$\begin{cases} (-\infty; +\infty) \\ (2; +\infty) \end{cases}$$

Ответ: $(2; +\infty)$.

Теперь рассмотрим ***неравенства вида*** $\boldsymbol{\sqrt{f(x)} > g(x)}$**.** Поскольку левая часть неравенства может принимать как положительные так и отрицательные значения, то возводить без определенных условий обе части в квадрат нельзя. Мы должны рассмотреть два случая: $g(x) < 0$ и $g(x) > 0$, то есть неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств.

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < \left(g(x)\right)^2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Так как $g(x) > 0$, то $(g(x))^2 > 0$ и, в силу транзитивного свойства неравенств, во второй системе первое неравенство можно опустить.

Пример 7. Решить неравенство $\sqrt{x+3} > x + 1$

Решение: Решим первую систему

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x+1 < 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x \geq -3 \\ x < -1 \end{cases}$ Решением этой системы является $x \in [-3; -1)$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ x+\ 3 > (x\ +\ 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x+3 > x^2+2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x^2+2x+1 < 0 \end{cases}$$

У квадратного трехчлена $x^2 + x - 2$ $a = 1$, $D = 1 + 8 = 16 > 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

Решение второй системы $x \in [-1; 1)$. Объединив два полученных множества, получим множество являющееся решением иррационального уравнения $x \in [-3; 1)$.

Ответ: $[-3; 1)$.

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} < \mathbf{g}(x)$. Из определения квадратного корня следует, что $\sqrt{f(x)} \geq 0$, поэтому $g(x) > 0$.

Тогда $\sqrt{f(x)} < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < \left(g(x)\right)^2 \end{cases}$.

Неравенство $g(x) > 0$ в этой системе опустить в общем случае нельзя.

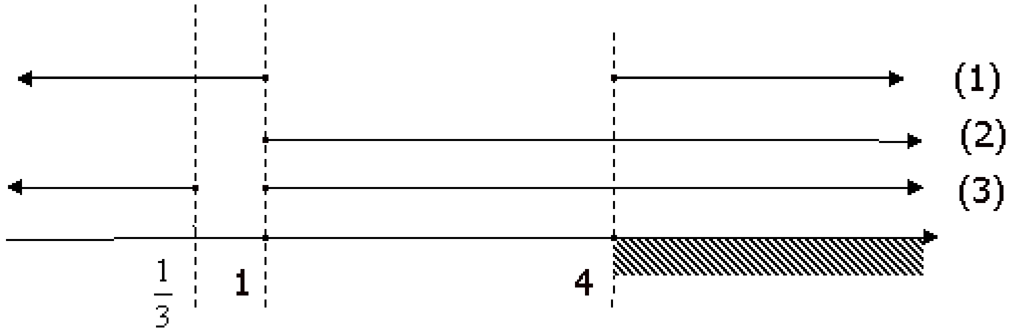
Пример 8. Решить неравенство $\sqrt{x^2-5x+4} \leq 2x - 2$.

Решение:

$$\begin{cases} x^2-5x+4 \geq 0 \\ 2x-2 \geq 0 \\ x^2-5x+4 < (2x-2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1, x \geq 4 \\ x \geq 1 \\ (x-1)(x-4) < 4(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1, \text{или } x \geq 4 \ \ (1) \\ x \geq 1 \ (2) \\ x \geq 1 \text{ или } x \geq \dfrac{1}{3} \ \ (3) \end{cases}$$



Ответ: $\{1\} \cup [4; +\infty)$

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > m(x)$**.** Чтобы избавиться от иррациональности в таких неравенствах приходится несколько раз возводить в квадрат обе части неравенства, при этом мы должны учитывать, что возводить в квадрат обе части неравенства можно в тех случаях, когда обе части либо положительны, либо отрицательны (в последнем случае необходимо менять знак неравенства). Нужно также учитывать, что при возведении в квадрат может произойти расширение ОДЗ, что приведет к появлению посторонних решений, их нужно отсеять.

Пример 9. Решить неравенство $\sqrt{x} \geq \sqrt{10-x} - \sqrt{x-5}$

Решение: Найдем ОДЗ. Для этого нам необходимо решить систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 10 \leq x \leftrightarrow 5 \leq x \leq 10 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Таким образом, ОДЗ данного неравенства есть множество чисел принадлежащих промежутку [5; 10]

Перенесем второе слагаемое в левую часть неравенства

$\sqrt{x} + \sqrt{x-5} \geq \sqrt{10-x}$, тогда при любом значении переменной из ОДЗ обе части положительны. Возведём их в квадрат.

$x + x - 5 + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-5} \geq 10 - x$;

$2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-5} \geq 15 - 3x$;

В данном конкретном случае можно отклонится от стандартной схемы и вот почему. В правой части неравенства задана линейная функция $t(x) = 15 - 3x$, заданная на промежутке [5; 10]. Её угловой коэффициент $k = -3$, следовательно, она убывает и так как на концах промежутка она принимает соответственно значения $t(5) = 0$, $t(10) = -15$, то на указанном промежутке $t(x) \leq 0$. На этом же промежутке $\sqrt{x} \geq 0$ и $\sqrt{x-5} \geq 0$ (из определения квадратного корня), следовательно, на указанном промежутке неравенство $2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-5} \geq 15 - 3x$ верно при любом значении переменной из ОДЗ.

Ответ: [5; 10].

Самостоятельная работа

1. Решите иррациональные уравнения

1) $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
2) $\sqrt{3x^2 - 2x - 2} = \sqrt{4x^2 - 5x}$
3) $\sqrt{2x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$
4) $\sqrt{x^2 - x + 3} = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}$
5) $3x + 1 = \sqrt{1 - x}$
6) $8 - 2x = \sqrt{x + 1}$
7) $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$
8) $\sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1$

2. Решите иррациональные неравенства

1) $\sqrt{2x - 1} > 3$.
2) $\sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{3}$.
3) $\sqrt{3 + x} \leq 3 - x$.
4) $\sqrt{5 - x} \geq x - 5$.
5) $\sqrt{10 - x}\,\sqrt{3x + 5} > x + 5$.
6) $3x + 1 \geq \sqrt{5x + 3}\,\sqrt{3x - 1}$.
7) $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.
8) $3x + 1 < \sqrt{1 - x}$.
9) $\sqrt{6 - 4x - x^2} \geq x + 4$.
10) $\sqrt{3x^2 - 4x - 1} \geq \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$.

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Дайте определение иррациональным уравнениям, неравенствам.
2) Что значит решить иррациональное уравнение, неравенство.
3) Как возникает в решении посторонний корень?

Практическое занятие по теме «Показательные уравнения и неравенства»

Цель: формирование понятия степени, его свойствах и умения выполнять основные действия над степенями с использованием изученных свойств при решении показательных уравнений и неравенств.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Показательные уравнения. Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называются показательными уравнениями.

Например, $2^x = 16$; $5^{3x-2} = 25^{10-x}$; $3^{x+2} + 3^x = 90$;

Простейшим примером показательного уравнения служит уравнение $a^x = b$, $a \neq 1$ и $a > 0$:

☞ если $b < 0$ или $b = 0$, то уравнение $a^x = b$ не имеет решения;

☞ если $b > 0$, то уравнение $a^x = b$ имеет единственный корень. Чтобы решить показательное уравнение надо число b представить в виде $b = a^c \Rightarrow a^x = a^c \Rightarrow c$ – является решением данного уравнения.

Сначала рассмотрим простейшие показательные уравнения, т.е. такие, левую и правую части которых можно сразу привести к одному основанию.

Пример 1. $2^x = 16$.

Решение: Записав 16 в виде 2^4, получим

$2^x = 2^4$, откуда

$x=4$.

Ответ: 4.

Пример 2. $8^x = 32$.

Решение: Имеем

$8^x = 2^{3x}$,

$32=2^5$. Следовательно,

$2^{3x} = 2^5$,

$3x=5$,

$x = \frac{5}{3}$.

Ответ: $\frac{5}{3}$.

Пример 3. $16^x = \frac{1}{4}$.

Решение:

$2^{4x} = 2^{-2}$,

$4x = -2$,

$x = -\frac{2}{4}$,

$x = -0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

В более сложных случаях применяют свойства степени:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. $\quad (ab)^x = a^x b^x$. $\quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$a^x : a^y = a^{x-y}$. $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

$(a^x)^y = a^{xy}$. $\quad a^0 = 1$.

Пример 4. $(0{,}25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$.

Решение: Приведём все степени к основанию 2: $0{,}25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$; $256 = 2^8$.

Значит,

$(2^{-2})^{2-x} = \frac{2^8}{2^{x+3}}$. Применяя правило деления степеней (№2), имеем:

$2^{-4+2x} = 2^{8-x-3}$;

$-4+2x = 8-x-3$;

$-4+2x = 5-x$; 2

$x + x = 5 + 4$;

$3x = 9$;

$x = 3$.

Ответ: 3.

Следующий тип показательных уравнений решается вынесением множителя с наименьшим показателем степени за скобки.

Пример 5. $2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-3}=44$.

Решение: Наименьшим показателем степени является $x - 3$, то вынесем 2^{x-3} за скобки:

$2^{x-3}(2^3+2^2-1) = 44$;

$2^{x-3}(8+4-1) = 44$;

$2^{x-3}\cdot 11 = 44$;

$2^{x-3} = 4$;

$2^{x-3} = 2^2$;

$x-3 = 2$;

$x = 5$.

Ответ: 5.

Пример 6. $7^x-3\cdot 7^{x-1}+7^{x+1}=371$.

Решение: Так как наименьшим показателем степени является $x - 1$, вынесем за скобки 7^{x-1}

$7^{x-1}(7^1-3\cdot 1+7^2) = 371$;

$7^{x-1}(7-3+49) = 371$;

$7^{x-1}\cdot 53 = 371$;

$7^{x-1} = 371:53$;

$7^{x-1}=7$;

$x-1 = 1$;

$x = 2$.

Ответ: 2.

Рассмотрим ещё один тип показательных уравнений. Это – уравнение, которое с помощью подстановки $a^x=y$ сводится к квадратному уравнению.

Пример 7. $7^{2x} - 48\cdot 7^x - 49=0$.

Решение: Заменим $7^x = y$, получим квадратное уравнение

$y^2 - 48y - 49=0$; решим его

$a =1$, $b = -48$, $c= -49$.

$D = b^2 - 4ac = (-48)^2 - 4\cdot 1\cdot(-49) = 2304+196 = 2500$;

$$y_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{48\pm 50}{2} = \begin{cases} y_1 = -1, \\ y_2 = 49. \end{cases}$$

$7^x = -1$ нет решений т.к. $y>0$;

$7^x = 49$; $7^x = 7^2$; x=2.

Ответ: x=2.

Пример 8. $5 \cdot 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$.

Решение: Заменим $5^x = y$, $5^{2x} = y^2$;

$5y^2 - 6y + 1 = 0$; решим его

$a = 5$, $b = -6$, $c = 1$.

$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 36 - 20 = 16$;

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 4}{2 \cdot 5} = \begin{cases} y_1 = \frac{1}{5}, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

$5^x = \frac{1}{5}$;	$5^x = 1$;
$5^x = 5^{-1}$;	$5^x = 5^0$;
$x = -1$;	$x = 0$.

Ответ: – 1; 0.

Показательные неравенства. Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств $a^x > a^b$ или $a^x < a^b$.

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции:

☞Если $a > 1$, *то функция* $\boldsymbol{y = a^x}$ – возрастающая, поэтому при переходе к равносильному неравенству знак неравенства не меняется, т.е. $\boldsymbol{x > b}$.

☞Если $0 < a < 1$, *то функция* $\boldsymbol{y = a^x}$ – убывающая, поэтому при переходе к равносильному неравенству знак неравенства меняется на противоположный, т.е. $\boldsymbol{x < b}$.

При решении более сложных неравенств, их сводят путём преобразований к простейшему виду.

Пример 9. Решить неравенство $3^x < 81$.

Решение: Запишем неравенство в виде

$3^x < 3^4$. Так как $a = 3 > 1$, то функция $y = 3^x$ является возрастающей, знак неравенства не меняется:

$x < 4$. Следовательно, решением данного неравенства является

$(-\infty; 4)$.

Ответ: $(-\infty; 4)$.

Пример 10. Решить неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$.

Решение: Запишем это неравенство в виде

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}$ или

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

Так как $a = \frac{1}{2} < 1$, то функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ является убывающей, знак неравенства меняется на противоположный, т.е.

$x < -\frac{3}{2}$. Решением данного неравенства является промежуток

$(-\infty; -\frac{3}{2})$.

Ответ: $(-\infty;-\frac{3}{2})$.

Самостоятельная работа

№	1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
1	$2^{-x}=128$	$5^{-x}=625$	$3^{-x}=81$	$2^{x+2}=128$
2	$3^{2x-1}=81$	$3^{x-3}=1$	$2^{5x}=2^{4x+2}$	$5^{x+2}=125$
3	$5^{x+1}+5^{x}=150$	$3^{x}-3^{x+3}=-78$	$8^{x}=16$	$5^{3x}=25^{x+0,5}$
4	$5^{x+1}+5^{x}+5^{x-1}=31$	$3^{x+2}-5\cdot3^{x}=36$	$2\cdot5^{x+2}-10\cdot5^{x}=8$	$2^{x+4}-2^{x}=120$
5	$7^{x+2}-14\cdot7^{x}=5$	$2^{x+3}+2^{x+1}-7\cdot2^{x}=48$	$4\cdot3^{x+2}+5\cdot3^{x+1}-6\cdot3^{x}=5$	$10\cdot5^{x-1}+5^{x+1}=7$
6	$3^{2x}-8\cdot3^{x}-9=0$	$8\cdot2^{2x}-9\cdot2^{x}+1=0$	$2\cdot4^{2x}-5\cdot2^{x}+2=0$	$3\cdot3^{2x}-10\cdot3^{x}+3=0$
7	$4^{x}+2^{x+1}-80=0$	$3\cdot9^{2x+1}-26\cdot9^{x}=1$	$5^{2x+1}-26\cdot5^{x}+5=0$	$2^{2x+1}+7\cdot2^{x}=4$
8	$4^{x}+2^{x}=12$	$9^{x}-5\cdot3^{x+1}+54=0$	$2^{2x+1}-7\cdot2^{x}+3=0$	$3^{2x+1}-8\cdot3^{x}=3$
9	$2^{2x+1}+7\cdot2^{x}=4$	$9^{x}+8\cdot3^{x}=9$	$4^{x}+2^{x}=12$	$9^{x}-5\cdot3^{x+1}+54=0$
10	$\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\geq27.$	$\left(\sqrt{6}\right)^{x}\leq\frac{1}{36}.$	$0,2^{x}\leq\frac{1}{25}.$	$(1,5)^{x}<2,25.$
11	$4^{5-2x}\leq0,25.$	$0,4^{2x+1}>0,16.$	$0,3^{7+4x}>0,027.$	$3^{2-x}<27.$
12	$2^{x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}.$	$8^{2x+1}>0,125.$	$100^{2x+1}<0,1.$	$27^{1+2x}>\left(\frac{1}{9}\right)^{2+x}.$
13	$\left(\frac{1}{4}\right)^{2+3x}<8^{x-1}.$	$\left(\frac{1}{27}\right)^{x}>9^{2x-1}.$	$10^{3x+1}<0,001.$	$4^{5-2x}\leq0,25.$
14	Найдите все целые решения неравенства: $\left(\frac{1}{27}\right)^{x}\leq3^{2-x}<27.$ $0,5<2^{1-x}\leq32.$ $0,2\leq5^{x+4}\leq125.$ $0,04\leq5^{2-x}\leq25.$ $1\leq7^{x-3}<49.$ $\left(\frac{1}{6}\right)^{x}<6^{3-x}\leq36.$ $0,01<10^{x+2}<10000.$ $1<10^{x+1}\leq1000000.$			

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Какие уравнения, неравенства называются показательными.
2) Алгоритм решения показательных уравнений.
3) Алгоритм решения показательных неравенств.

Практическое занятие по теме «Логарифмы. Переход к новому основанию логарифма»

Цель: ввести понятие логарифма, основное логарифмическое тождество, формулу перехода к новому основанию, рассмотреть действия с логарифмами.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

$$a^n = b$$

а*-основание степени;* ***n****- показатель степени;* ***b*** *-число* (*n-ая степень числа а*)

Определение*:* Логарифмом числа ***b*** по основанию ***a*** называется показатель ***x*** степени, в которую надо возвести ***a***, чтобы получить число ***b****:*

$$\log_a b = x \rightarrow a^x = b.$$

Определение логарифма можно кратко записать так: $a^{\log_a b} = b$ – его обычно называют *основным логарифмическим тождеством.*

☞ Если основание $a = 10$, то логарифм называется *десятичным* и записывается так: $\log_{10} b = \lg b$

☞ Если основание $a = e$, где $e \approx 2{,}7$ то логарифм называется *натуральным* и записывается так: $\log_e b = \ln b$

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются свойства логарифмов. Рассмотрим основные из них.

Свойства логарифмов

1) $\log_a 1 = 0$, *так как* $a^0=1$.
2) $\log_a a = 1$, *так как* $a^1=a$.
3) $a^{\log_a x} = x$ - основное тождество логарифмов
4) $\log_a x + \log_a y = \log_a x\cdot y$, *так как* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
5) $\log_a x - \log_a y = \log_a x:y$, *так как* $a^m : a^n = a^{m-n}$.
6) $p\cdot\log_a x = \log_a x^p$, *так как* $(a^n)^p = a^{np}$.
7) $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$.
8) $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$.

Примеры:

1) $\log_5 125 = \underline{3}$, т.к. $5^{\underline{3}} = 125$.

2) $\log_{13}\sqrt[5]{169} = \log_{13}\sqrt[5]{13^2} = \log_{13}13^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}\log_{13}13 = \frac{2}{5}$.

3) $\log_{\frac{1}{4}}(64\cdot\sqrt[5]{16}) = \log_{\frac{1}{4}}(4^3\cdot 4^{\frac{2}{5}}) = \log_{\frac{1}{4}}(4^{3+\frac{2}{5}}) = \log_{\frac{1}{4}}(4^{3\frac{2}{5}}) =$
$= 3\frac{2}{5}\log_{\frac{1}{4}}(4) = 3\frac{2}{5}\cdot(-1) = -3\frac{2}{5}$.

4) $4^{\log_4 5} = 5$.

5) $3^{-2\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$.

6) $2^{3+\log_2 9} = 2^3\cdot 2^{\log_2 9} = 8\cdot 9 = 72$.

7) $10^{3-\log_{10}25} = 10^3 : 10^{\log_{10}25} = 1000 : 25 = 4$.

8) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4^{\frac{1}{7}}} = \frac{\log_3 4^2}{\frac{1}{7}\log_3 4} = \frac{2\log_3 4}{\frac{1}{7}\log_3 4} = \frac{2}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{2}$.

9) $log_6 18 + log_6 2 = log_6 (18\cdot2) = log_6 36 = 2$, т.к. $6^2 = 36$.

10) $log_{12} 48 – log_{12} 4 = log_{12} (48:4) = log_{12} 12 = 1$, т.к. $12^1 = 12$.

Самостоятельная работа Выполните действия с логарифмами

1 Вариант	**2 Вариант**	**3 Вариант**	**4 Вариант**
$log_2 16$	$log_2 64$	$log_2 32$	$log_2 8$
$log_2 \frac{1}{64}$	$log_2 \frac{1}{2}$	$log_2 \frac{1}{8}$	$log_2 \frac{1}{32}$
$log_3 81$	$log_3 27$	$log_3 9$	$log_3 3$
$log_5 625$	$log_6 216$	$log_5 625$	$log_6 216$
$log_{\frac{1}{5}} 125$	$log_{\frac{1}{3}} 27$	$log_{\frac{1}{4}} 64$	$log_{\frac{1}{6}} 36$
$log_{11} \sqrt[5]{121}$	$log_3 \sqrt[4]{243}$	$log_2 \sqrt[6]{128}$	$log_{15} \sqrt[5]{225}$
$log_2 2^4$	$log_3 (3)^{-7}$	$log_8 8^{-3}$	$log_{0,1} (0,1)^{-5}$
$log_{\frac{1}{15}} (225 \cdot \sqrt[3]{15})$	$log_{\frac{1}{2}} (8 \cdot \sqrt[5]{4})$	$log_{\frac{1}{3}} (81 \cdot \sqrt[3]{3})$	$log_{\frac{1}{2}} (4 \cdot \sqrt[5]{8})$
$3^{log_3 18}$	$5^{log_5 16}$	$10^{log_{10} 2}$	$4^{log_4 26}$
$7^{2log_7 9}$	$3^{2log_3 6}$	$2^{6log_2 2}$	$3^{5log_3 2}$
$125^{log_5 3}$	$64^{log_4 7}$	$81^{log_3 12}$	$8^{log_2 5}$
$6^{2+log_6 4}$	$8^{2+log_8 5}$	$4^{2+log_4 8}$	$5^{2+log_5 6}$
$3^{log_3 4-2}$	$2^{log_2 5-2}$	$5^{log_5 4-1}$	$7^{log_7 5-2}$
$log_6 2+ log_6 3$	$log_{15} 3+ log_{15} 5$	$log_{26} 2+ log_{26} 13$	$log_{12} 4+ log_{12} 3$
$log_4 8+ log_4 2$	$log_6 12+ log_6 3$	$log_{12} 4+ log_{12} 36$	$log_{10} 25+ log_{10} 4$
$log_3 8 – log_3 \frac{8}{27}$	$log_2 15 – log_2 30$	$log_2 28 - log_2 7$	$log_5 40 – log_5 8$
$log_8 \frac{1}{16} – log_8 32$	$log_5 75 – log_5 3$	$log_2 15 – log_2 \frac{15}{16}$	$log_3 54 – log_3 2$
$log_9 15+ log_9 18– log_9 10$	$log_8 12– log_8 15 + log_8 20$	$log_7 6 – log_7 14 – log_7 21$	$log_3 36 –log_3 20 + log_3 45$
$\frac{log_3 64}{log_3 16}$	$\frac{log_5 27}{log_5 81}$	$\frac{log_3 16}{log_3 32}$	$\frac{log_5 9}{log_5 27}$

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Что называется логарифмом?
2) Основные логарифмические свойства.
3) Как применить основное логарифмическое тождество?

Практическое занятие по теме «Логарифмические уравнения и неравенства»

Цель: рассмотреть способы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Логарифмические уравнения. Уравнение, содержащее переменную x под знаком логарифма, называется логарифмическим уравнением.

Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид: $\boldsymbol{log_a\ f\ (x) = n}$**.** Решением данного уравнения является $\boldsymbol{f\ (x) = a^n}$.

Решение логарифмического уравнения $\boldsymbol{log_a\ f(x) = log_a\ g(x)}$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$

Проверка найденных значений неизвестного по условия является необязательной. Можно выявить посторонние корни с помощью нахождения ОДЗ (область допустимых значений). Эта система задается системой неравенств $\boldsymbol{f(x) > 0,\ g(x) > 0}$**.**

При решении более сложных логарифмических уравнений часто используют свойства логарифмов:

1) $log_a\, x + log_a\, y = log_a\, x{\cdot}y$, *так как* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2) $log_a\, x - log_a\, y = log_a\, x{:}y$, *так как* $a^m : a^n = a^{m-n}$.
3) $p\,log_a\, x = log_a\, x^p$, *так как* $(a^n)^p = a^{np}$.

Пример 1. Решите уравнение $log_3(2x+1) = 2$.

Решение: Для выявления посторонних корней находим ОДЗ: $2x+1>0$, $x>-\frac{1}{2}$.

По определению логарифма:

$2x + 1 = 3^2$.

$2x = 9 - 1$.

$x = 8:2$

$x = 4$ (так как $4 > -\frac{1}{2}$)

Ответ: 4.

Пример 2. Решите уравнение $log_5\ (2x + 3) = log_5\ (x + 1)$

Решение: ОДЗ: $2x+3>0$, $x > -1{,}5$.

$x+1>0$, $x > -1$.

$2x+3 = x+1$,

$2x - x = 1-3$;

$x = -2$;

Число –2 не удовлетворяет условию ОДЗ, поэтому уравнение не имеет корней.

Ответ: нет решений.

Пример 3. Решите уравнение $log_2\ (x^2 + 4x + 3) = 3$.

Решение: Данному уравнению удовлетворяют те значения x, для которых выполнено равенство
$(x^2 + 4x + 3) = 2^3$.
$(x^2 + 4x + 3) = 8$.
$x^2+4x–5 = 0$. Получили квадратное уравнение, решив его получим $x_1=1$, $x_2=–5$.
Проверяем найденные корни:
при $x = 1$, $log_2\ (1^2 + 4·1 + 3) = 3$, т.е $log_2\ 8 = 3$;
при $x = – 5$, $log_2\ ((– 5)^2 + 4·(– 5) + 3) = 3$, т.е $log_2\ 8 = 3$.
Ответ: – 5; 1.
Пример 4. Решите уравнение $log_2\ (x + 1) + log_2\ (x + 3)=3$
$log_2\ ((x + 1)·\ (x + 3)) = 3$, по первому свойству логарифма.
$(x + 1) · (x + 3) = 2^3$, по определению логарифма
$x^2 + 4x + 3 = 8$.
$x^2+4x – 5=0$. Получили квадратное уравнение, решив его получим $x_1=1$, $x_2=–5$.
При $x = – 5$ числа $x + 1$ и $x + 3$ отрицательны и поэтому левая часть уравнения не имеет смысла, т.е. $x = – 5$ не является корнем уравнения.
Ответ: 1

Логарифмические неравенства. Простейшее логарифмическое неравенство имеет вид: $\boldsymbol{log_{\mathrm{a}}x > log_a b}$**.**
☞ Если $a >1$*, то функция* $\boldsymbol{y = log_a x}$ - возрастающая, поэтому при переходе к равносильному неравенству знак неравенства не меняется, т.е. $\boldsymbol{x > b}$**.**
☞ Если $0< a <1$*, то функция* $\boldsymbol{y = log_a x}$ – убывающая, поэтому при переходе к равносильному неравенству знак неравенства меняется на противоположный, т.е. $\boldsymbol{x< b}$**.**

При решении более сложных неравенств, их сводят путем преобразований к простейшему виду.
Пример 5. Решите неравенство $log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > -2$.
Решение: ОДЗ: $5 – 2x >0$, $–2x > –5$, $2x < 5$, $x < 2,5$.
По определению логарифма $– 2 = log_{\frac{1}{3}}9$, поэтому $log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > log_{\frac{1}{3}}9$;
Так как $\frac{1}{3} < 1$, то функция $y = log_{\frac{1}{3}}x$ – убывает на всей области определения, знак неравенства меняем на противоположный, следовательно,
$5 – 2x < 9$. Таким образом, второму неравенству удовлетворяют такие числа x, для которых
$–2x < 9 – 5$, откуда
$–2x < 4$;
$2x > – 4$;
$x > – 2$. С учётом ОДЗ решением данного неравенства получим промежуток $(– 2; 2,5)$.
Ответ: $(– 2; 2,5)$
Пример 6. Решите неравенство $lg(3x-4) < lg(2x+1)$
Решение. ОДЗ: $3x – 4>0$, $x > \frac{4}{3}$.
$2x+1>0$, $x > -\frac{1}{2}$.

Так как 10>1, то функция $y = lgx$ - возрастает на всей области определения, знак неравенства не меняем на противоположный, следовательно,
$3x - 4 < 2x + 1$. Решая данное неравенство, получим
$3x - 2x < 1 - 4$,
$x < -3$. С учётом ОДЗ множеством решений данного неравенства является промежуток ($\frac{4}{3}$; -3).
Ответ: ($\frac{4}{3}$; -3).

Самостоятельная работа

1. Решите логарифмические уравнения:
   1) $log_2(2\text{x} - 1) = 3$
   2) $log_6 (3x – 6) = log_6 (2x – 3)$
   3) $log_{0,1} (x^2+4x – 20) =0$
   4) $log_3(2x + 1) = log_3 13 + 1$
   5) $log_5 \frac{4+2x}{x-5} = 2$
   6) $log_{23} (2x – 1) – log_{23} x=0$
   7) $lg(3x^2 + 12 + 19) - lg(3x + 4) = 1$
   8) $lg(x^2 + 2x + 7) - lg(x - 1) = 0$
2. Решите логарифмические неравенства:
   1) $log_3 (x + 2) < 3$
   2) $log_9(4 - 3\text{x}) > 0.5$
   3) $log_7(x - 1) \leq log_7 2 + log_7 3$
   4) $log_{0.5}(4x - 7) < log_{0.5}(x + 2)$
   5) $log_{0,5}(2x + 1) > -2$
   6) $log_{0.5}(2x + 7) \geq log_{0.5}(x + 1)$
   7) $log_{15} (x – 3) + log_{15} (x – 5) < 1$
   8) $log_{\frac{1}{5}}(x - 10) - log_{\frac{1}{5}}(x + 2) \geq -1$

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:
1) Какие уравнения называются логарифмическими?
2) Дайте определение ОДЗ.
3) Какие неравенства называются логарифмическими?

Практическое занятие по теме «Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей»

***Цель*: в**вести понятие параллельных плоскостей, рассмотреть и доказать теоремы, выражающие признак параллельности плоскостей и свойства параллельных плоскостей, **в**вести понятие перпендикулярных плоскостей, рассмотреть и доказать теоремы, выражающие признак перпендикулярности плоскостей и свойства перпендикулярных плоскостей.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Определение: Если две плоскости не пересекаются, то они называются параллельными. *Обозначение:* $\alpha \| \beta$

Как выяснить, параллельны ли какие-либо две плоскости в пространстве?

Можно воспользоваться определением, но это нецелесообразно, т.к. установить пересечение плоскостей не всегда возможно. Поэтому необходимо рассмотреть условие достаточное для того, чтобы утверждать о параллельности плоскостей.

Рассмотрим ситуации:

а) если $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \| b$, то $\alpha \| \beta$?

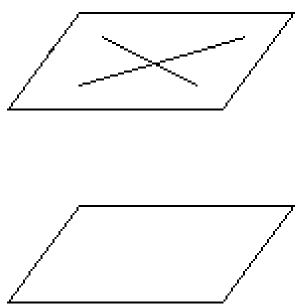
б) если $a \| a_1$, $b \| b_1$, a и a_1 лежат в α, b и b_1 лежат в β, то $a \| \beta$?

в) если $a \cap b = M$, a лежит в α и $a \| a_1$, $b \| b_1$, b_1 лежит в β, то $a \| \beta$?

Почему в а) и б) ответ: «не всегда», а в в) «да»? (Пересекающиеся прямые определяют плоскость единственным образом, значит, α и β определены однозначно!)

Ситуация 3 и есть признак параллельности двух плоскостей.

Теорема: Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Дано:

$a \cap b = M$

$a \in \alpha$, $b \subset \alpha$

$a \| a_1$, $b \| b_1$

$a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$

Доказать: $\alpha \| \beta$

Доказательство:

(Обозначения на чертеж наносят учащиеся).

1. Отметим: $a \| a_1$, $a \notin \beta$, $a_1 \subset \beta \rightarrow a \| \beta$. Аналогично: $b \| \beta$

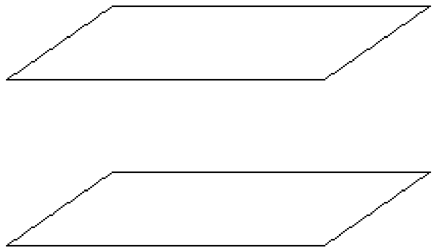
2. Пусть: α не параллельна $\beta \rightarrow \alpha \cap \beta = c$.

3. Имеем: $a \subset \alpha$, $a \| \beta$, $\alpha \cap \beta = c \rightarrow a \| c$. Аналогично: $b \| c$

4. Получим: через М проходит $a \| c$ и $b \| c$ противоречие с аксиомой планиметрии.

5. Итак: α не параллельна β неверно, значит $\alpha \parallel \beta$, ч. и т. д.

Задача № 51. (Обозначения на чертеж наносят обучающиеся).



Дано:

$m \cap n = N$

$m \subset \alpha$, $n \subset \alpha$

$m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$

Доказать: $\alpha \parallel \beta$

Доказательство:

1 способ

1. $O \in \beta$. Построим $m_1 \parallel m$, $O \in m_1$, $m_1 \subset \beta$ и $n_1 \parallel n$, $O \in n_1$, $n_1 \subset \beta$
2. $m \cap n = N$, $m \subset \alpha$, $n \in \alpha$, $m \parallel m_1$, $n \parallel n_1$, $m_1 \subset \beta$, $n_1 \subset \beta \to \alpha \parallel \beta$

ч. т.д.

2 способ

$O \in \beta$. Ввести γ через n и O и γ_1через m и O.

$\gamma \cap \beta = n_1$, тогда $n_1 \parallel n$ (свойство)

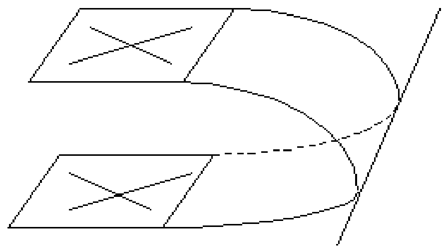
$\gamma_1 \cap \beta = m_1$, тогда $m_1 \parallel m$ (свойство)

$n_1 \parallel n$, $m_1 \parallel m$, $m \cap n = N$, $m \subset \alpha$, $n \subset \alpha$, $n_1 \subset \beta$, $m_1 \subset \beta \to \alpha \parallel \beta$.

Рассмотрим два свойства параллельных плоскостей:

Теорема: Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

(Достраивают и наносят обозначение на чертеж сами обучающиеся).



Дано:

$\alpha \parallel \beta$

$\alpha \cap \gamma = a$,

$\beta \cap \gamma = b$

Доказать: $a \parallel b$

Доказательство: (разбирают самостоятельно, у доски доказывают на оценку)

1. $a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$
2. a не параллельна b , тогда $a \cap b = M$
3. $M \in \alpha$, $M \in \beta \to \alpha \cap \beta = c$ (A_3).

Получили противоречие с условием. Значит $a \parallel b$ ч. т.д.

Теорема: Отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями, равны; чертеж используем тот же (свойства 1).

Дано:

$\alpha \parallel \beta$

$a \parallel b$,

$a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$

АВ $\in a$, СД $\in b$

Доказать: АВ = СД

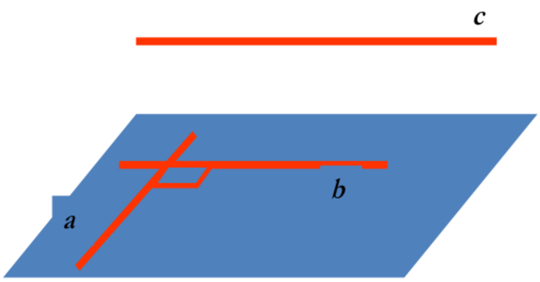
Доказательство:

1. $\gamma \cap \alpha = AC$ и $\gamma \cap \beta = ВД$, $\alpha \parallel \beta \rightarrow AC \parallel ВД$
2. АВСД – параллелограмм, т.к. $AB \parallel СД$, $AC \parallel ВД$
3. из п.2 $\rightarrow AB = СД$ ч.т.д.

Наряду с отношением параллельности в геометрии важную роль играет отношение перпендикулярности. На плоскости имеет смысл говорить только о перпендикулярности прямых, а в пространстве уже три возможности: перпендикулярность прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей. Займемся последовательным изучением этих отношений. Начнём с перпендикулярности прямых.

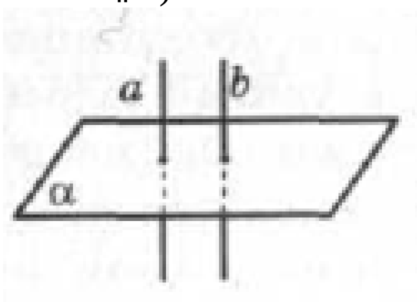
Определение: Две прямые в пространстве называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°. Обозначается $a \perp b$.

Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

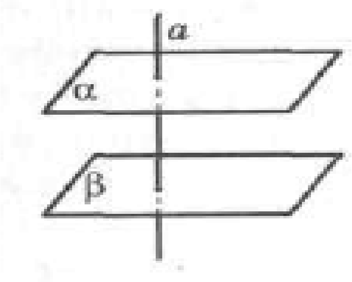


Перпендикулярные прямые в пространстве

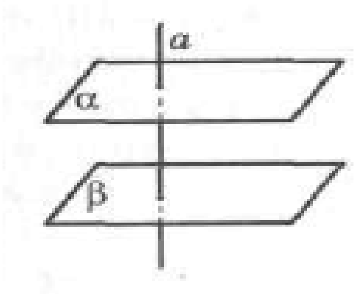
1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна другой прямой ($a \perp \alpha$ b и $a \parallel b \Rightarrow b \perp \alpha$).
2. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны. ($a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$).



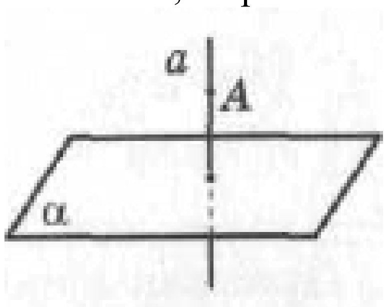
3. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости ($\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha \Rightarrow a \perp \beta$).



4. Если две различные плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны ($a \perp \alpha$ и $a \perp \beta \Rightarrow a \parallel \beta$).



5. Через любую точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну.



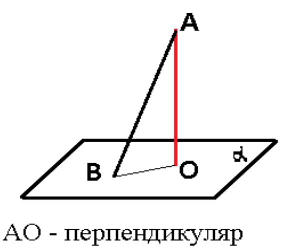
6. Через любую точку прямой можно провести плоскость, перпендикулярную ей и притом только одну.

Перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость, - отрезок, лежащий на прямой, проходящей через эту точку перпендикулярно плоскости, соединяющий данную точку с точкой плоскости. Конец этого отрезка, лежащий на плоскости, называют **основанием перпендикуляра.**

Наклонная, проведенная из данной точки к плоскости, **-** любой отрезок, соединяющей данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий на плоскости, называют ***основанием наклонной.***

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется ***проекцией наклонной.***

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. АО – расстояние от точки А до плоскости α.

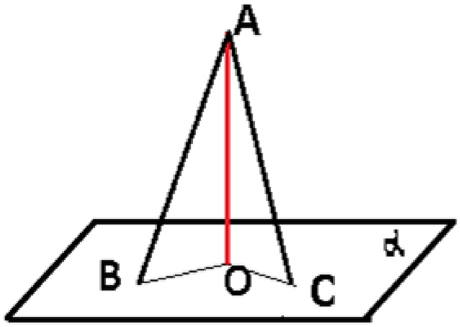


АО - перпендикуляр к плоскости α
АВ - наклонная к плоскости α
ВО - проекция наклонной АВ на плоскость α

Свойства перпендикуляра и наклонной:

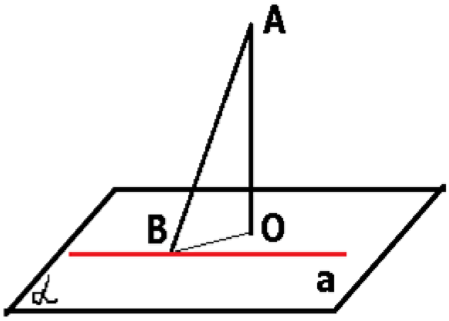
1. Перпендикуляр короче наклонной, проведенной из одной точки АО < АВ.
2. Из данной точки, не лежащей на плоскости, можно провести ***только один перпендикуляр*** к плоскости и бесконечное множество наклонных.

3. Если из одной точки к одной плоскости проведены перпендикуляр и две наклонные, то равные наклонные имеют равные проекции (если AB=AC, то BO=CO). Если проекции наклонных равны, то сами наклонные равны (если BO= CO, то AB=AC);
4. Большая наклонная имеет большую проекцию (если AB>AC, то BO>CO);
5. Из двух наклонных больше та, которая имеет большую проекцию (если BO>CO, то AB>AC).

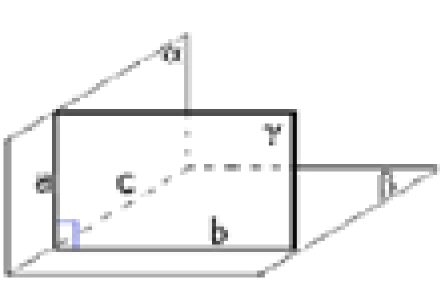


Теорема о трех перпендикулярах. Если прямая, проведенная на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна наклонной (если $a \perp$BO, то $a \perp$ AB).

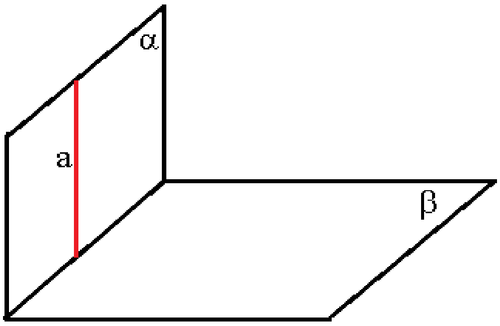
Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной (если $a \perp$ AB, то $a \perp$ BO).



Перпендикулярные плоскости – две пересекающиеся плоскости, для которых выполняется условие, что третья плоскость, перпендикулярная линии их пересечения, пересекает их по перпендикулярным прямым.
Плоскости α и β перпендикулярны ($\alpha \perp \beta$), если плоскость $\gamma \perp c$, γ пересекает α и β по взаимноперпендикулярным прямым a и b, ($a \perp b$).

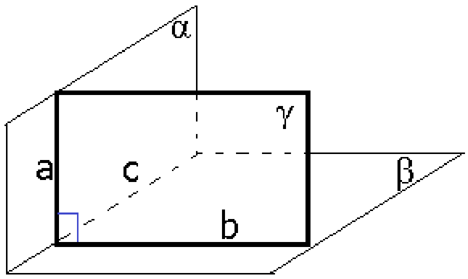


Признак перпендикулярности плоскостей. Если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (если $a \subset \alpha$, $a \perp \beta$, то $\alpha \perp \beta$).

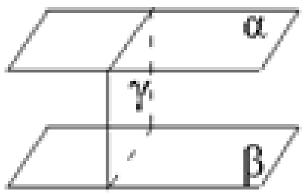


Свойства перпендикулярных плоскостей:

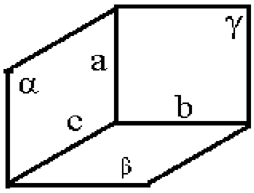
1. Любая плоскость, перпендикулярная прямой пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым (если $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\gamma \cap \beta = b$ и $\gamma \perp c$, то $a \perp b$).



2. Если прямая лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна прямой их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости (если $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = b$, $a \in \alpha$ и $a \perp b$, то $a \perp \beta$).
3. Через любую точку пространства можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости
4. Две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, или параллельны, или пересекаются по прямой, перпендикулярной третьей плоскости.



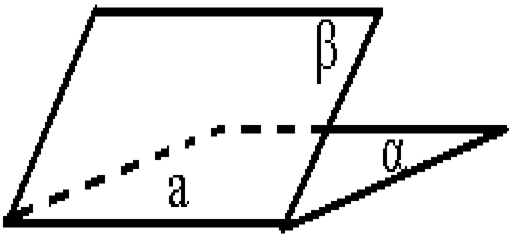
5. Три попарно перпендикулярные плоскости пересекаются по трем перпендикулярным прямым (если $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$, $\gamma \perp \alpha$, то $a \perp b$, $b \perp c$, $a \perp c$).



6. Через данную прямую некоторой плоскости можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

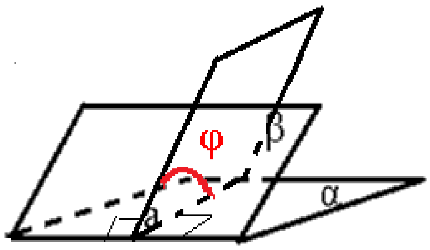
Двугранный угол – фигура, образованная прямой *a* и двумя полуплоскостями с общей границей *a*, не принадлежащими одной плоскости.

Полуплоскости называются *гранями*, а прямая, их ограничивающая, - *ребром* двугранного угла (α и β – грани двугранного угла, *a* – ребро двугранного угла).



Линейный угол двугранного угла – угол, являющийся разрезом этого двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру (угол между двумя перпендикулярами к ребру двугранного угла, лежащими на гранях двугранного угла и имеющими на ребре общее начало).

Мера двугранного угла – мера соответствующего ему линейного угла. Мера двугранного угла находится в переделах от 0 до 180 градусов.



$0^\circ < \varphi < 180^\circ$

Самостоятельная работа
Вариант №1

1. *Через конец A отрезка AB проведена плоскость α. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если BB_1= 15 см, AC:BC = 3:2.*

2. *Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке M, а сторону BC – в точке N. Точка M делит отрезок AC в отношении 3:7, считая, от точки C. Найдите длину отрезка MN, если AB = 28 см.*
3. *Точка M лежит между параллельными плоскостями α и в. Прямые а и в проходящие через точку M, пересекают плоскость α в точках A_1 и B_1, а плоскость в в точках A_2 и B_2 соответственно. Найдите MB_1, если $A_1M:A_1A_2 = 2:5$, $B_1B_2 =15$ см.*
4. *Даны параллельные плоскости α и в. Через вершины треугольника ABC, лежащего в плоскости α, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в, в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Найдите медиану треугольника $A_1B_1C_1$, проведённую к стороне A_1B_1, если AB = 12 см, BC = 10 см, AC = 10 см.*
5. Из точки, не принадлежащей данной плоскости, проведены к ней две наклонные, равные 10 дм и 18 дм. Сумма длин их проекций на плоскость равна 16 дм. Найдите проекцию каждой из наклонных.
6. Из точек А и В, лежащих в перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры АС и ВД на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка АВ, если АД = 5 м, ВС = 5 м, СД =1 м.
7. Катеты прямоугольного треугольника АВС равны 6 см и 8 см. Из вершины прямого угла С проведён отрезок СД = 4,8 см и перпендикулярный плоскости треугольника. Найти расстояние от от точки Д до гипотенузы АВ.
8. Из точки В, не лежащей в плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр ВС = 12 см и наклонная ВД = 13 см. Через точку Д к плоскости α проведена прямая d, перпендикулярная прямой ВД. Найдите расстояние от точки С до прямой d.

Вариант №2

1. *Через конец A отрезка AB проведена плоскость α. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка BB_1, если $CC_1 = 15$ м, AC:BC = 5:3.*
2. *Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке E, а сторону BC – в точке F. Точка E делит отрезок AC в отношении 3:5, считая от точки C. Найдите длину отрезка EF, если AB = 20 см.*
3. *Через точку K проведены две прямые а и в, пересекающие две параллельные плоскости α и в: первую в точке A_1 и A_2, вторую в точках B_1 и B_2 соответственно. Вычислите KA_1 и KB_2, если $A_1A_2:B_1B_2 = 3:4$, A_1B_1=7см, KA_2 =12 см.*
4. *Даны параллельные плоскости в и γ. Через вершины треугольника BCД, лежащего в плоскости в, проведены параллельные прямые,*

пересекающие плоскость γ, в точках B_1, C_1, Д$_1$ соответственно. Найдите медиану треугольника B_1C_1Д$_1$, проведённую к стороне B_1C_1, если ВС = 10 м, ВД=13м, СД = 13 м.

5. Из точки, не принадлежащей данной плоскости, проведены к ней две наклонные, сумма длин которых равна 28 дм. Проекции этих наклонных на плоскость равны 6 дм и 8 дм. Найдите длины наклонных.
6. Из точек А и В, лежащих в перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры АС и ВД на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка АВ, если АД = 4 м, ВС =7 м, СД =1.
7. Катеты прямоугольного треугольника АВС равны 15 см и 20 см. Из вершины прямого угла С проведён отрезок СД = 35 см и перпендикулярный плоскости треугольника. Найти расстояние от точки Д до гипотенузы АВ.
8. Из точки А, не лежащей в плоскости β, проведены к этой плоскости перпендикуляр АС и наклонная АД. Через точку Д к плоскости β проведена прямая d, перпендикулярная прямой СД. Найдите расстояние от точки А до прямой, если АС = 8 дм, СД = 15 дм.

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Дайте определение параллельных прямых, перпендикулярных прямых.
2) Дайте определение перпендикуляра, наклонной, проекции наклонной.
3) Как выяснить, параллельны ли какие-либо две плоскости в пространстве?

Практическое занятие по теме «Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач»

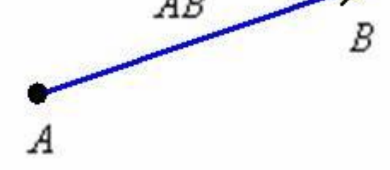
Цель: Проверить на практике знание понятия вектор, закрепить умение и навык вычислять сумму векторов, разность векторов, произведение вектора на число, находить угол между векторами, рассмотреть прямоугольную систему координат в пространстве.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Определение: Вектором называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец. В данном



случае началом отрезка является точка A, концом отрезка – точка B. Сам вектор обозначен через $\overline{\mathrm{AB}}$ или $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Направление имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, и это уже совершенно другой вектор. Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* $\overline{0}$. У такого вектора конец и начало совпадают.

!!! Примечание: *Здесь и далее можете считать, что векторы лежат в одной плоскости или можете считать, что они расположены в пространстве – суть излагаемого материала справедлива и для плоскости и для пространства.*

Способы записи векторов:

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами: $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$… и так далее. При этом первая буква обязательно обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.

2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$… В частности, наш вектор $\overline{AB}$ можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой $\overline{a}$.

Определение: Длиной или модулем ненулевого вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина нулевого вектора $\overline{0}$ равна нулю. Длина вектора обозначается знаком модуля: $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$.

Действия с векторами в координатах

1) Как найти вектор по двум точкам?

Если даны две точки плоскости $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты: $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

Если даны две точки пространства $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты: $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

То есть, из координат конца вектора нужно вычесть соответствующие координаты начала вектора.

Пример 1. Даны две точки плоскости $A(2;\ 1)$ и $B\ (-2;\ 3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$

Решение: по соответствующей формуле: $\overline{AB}= (-2-2;\ 3-1) = (-4;2)$**.**

Ответ: $\overline{AB}$ $(-4;2)$**.**

Пример 2.

а) Даны точки $A(-4;\ 5)$ и $B\ (1;\ -3)$. Найти векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.
б) Даны точки $A(2;\ 0)$, $B\ (-7;\ 1)$ и $C(4;1)$. Найти векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$.
в) Даны точки $F(-2;\ -1;0)$ и $E(0;\ -1;\ -2)$. Найти векторы $\overline{FE}$ и $\overline{EF}$.
г) Даны точки $A_1(10;\ 5;-4)$, $A_2(-8;6;\ 3)$, $A_3(1;1;\ -1)$, $A_4(0;0;\ 1)$. Найти векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$**..**

2) Как найти длину отрезка?

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости A (x_1; y_1) и В (x_2; y_2), то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Если даны две точки пространства A (x_1; y_1; z_1) и В (x_2; y_2; z_2), то длину отрезка AB можно вычислить по формуле

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Пример 3. Даны точки A(–3; 5) и B (1; –3). Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле:

$$|AB| = \sqrt{\left(1 - (-3)\right)^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}\ .$$

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$.

Пример 4. Даны точки A(2;3;–1) и B(–5;3;0). Найти длину отрезка AB.

3) Как найти длину вектора?

Если дан вектор плоскости $\overline{v}(v_1; v_2)$, то его длина вычисляется по формуле $\overline{v}$=$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Если дан вектор пространства $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, , то его длина вычисляется по формуле $\overline{v}$=$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Данные формулы (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью теоремы Пифагора.

Пример 5. Даны точки A(–3; 5) и B (1; –3). Найти длину вектора $\overline{AB}$

Решение: Сначала найдём вектор $\overline{AB}$:

$\overline{AB}\ (1 - (-3); -3 - 5) = (4; -8)$.

По формуле $\overline{v}$=$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ вычислим длину вектора:

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-8^2)} = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}\ .$

Ответ:$\left|\overline{AB}\right| = 4\sqrt{5}\ .$

4) Действия с векторами в координатах

В первой части урока мы рассматривали правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассматривали их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда заданы координаты векторов:

а) *Правило сложения векторов*. Рассмотрим два вектора плоскости $\overline{v}(v_1; v_2)$ и $\overline{\omega}(\omega_1; \omega_2)$. Для того, чтобы сложить векторы, необходимо сложить их соответствующие координаты: $\overline{v} + \overline{\omega}$=$(v_1 + \omega_1; v_2 + \omega_2)$.

Если даны векторы $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\overline{\omega}(\omega_1; \omega_2; \omega_3)$, то их суммой является вектор $\overline{v} + \overline{\omega}$=$(v_1 + \omega_1; v_2 + \omega_2; v_3 + \omega_3)$.

б) *Правило умножения вектора на число*. Для того чтобы вектор $\overline{v}(v_1; v_2)$ умножить на число μ, необходимо каждую координату данного вектора умножить на число μ: $\mu\overline{v}(\mu v_1; \mu v_2)$.

Для пространственного вектора $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, правило такое же: $\mu\overline{v}(\mu v_1; \mu v_2; \mu v_3)$.

Пример 6. Даны векторы $\overline{a}$(1; –2) и $\overline{b}$(2;3). Найти 2$\overline{a}$, $\overline{a}$ + $\overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$.

Решение:

$2\overline{a}$=2(1; –2)= (2; –4)

$\overline{a}+\overline{b}$=(1; –2)+ (2;3) =(1 + 2;–2+ 3)= (3;1)

$\overline{a}-\overline{b}$=(1; –2) – (2;3) =(1 – 2;–2– 3)= (–1; –5)

Ответ: $2\overline{a}$= (2; –4), $\overline{a}+\overline{b}$= (3;1), $\overline{a}-\overline{b}$= (–1; –5)

Пример 7. Даны векторы $\overline{a}$(0;4;–7) и $\overline{b}$(7;–9;1). Найти $3\overline{a}-2\overline{b}$ и $-\overline{a}+4\overline{b}$.

Решение:

$3\overline{a}-2\overline{b}$ =3(0;4;–7) –2(7;–9;1)=(0;12;–21) –(14; –18;2)=(–14;30; –23).

$-\overline{a}+4\overline{b}$= – (0;4;–7)+4(7;–9;1)= (0;–4; 7)+ (28;–36;4)=(28;–40;11)

Ответ: $3\overline{a}-2\overline{b}=(-14;\ 30;\ -23)$, $-\overline{a}+4\overline{b}$=(28;–40;11)

5) Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot cos<(\overline{a};\overline{b})$

Пример 8. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=5, <(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу

$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos<(\overline{a};\overline{b})=2\cdot5\cdot cos\frac{\pi}{6}=10\cdot cos\frac{\pi}{6}=10\cdot 2=5\sqrt{3}$.

Ответ: $5\sqrt{3}$

Пример 9. Найти скалярное произведение векторов $\overline{c}=-2\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}|=4\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=8$, $<(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{4}$.

Решение: Сначала проясним ситуацию с вектором $\overline{c}=-2\overline{a}+\overline{b}$. Сумма векторов $-2\overline{a}$ и $\overline{b}$ представляет собой вполне определенный вектор, который и обозначен через $\overline{c}$. Итак, по условию требуется найти скалярное произведение $\overline{c}\cdot\overline{d}$. По идее, нужно применить рабочую формулу

$\overline{c}\cdot\overline{d}=|\overline{c}|\cdot|\overline{d}|\cdot\cos<(\overline{c};\overline{d})$, но нам неизвестны длины векторов $\overline{c},\overline{d}$ и угол между ними. Зато в условии даны аналогичные параметры для векторов $\overline{a},\overline{b}$, поэтому мы пойдём другим путём:

$\overline{c}\cdot\overline{d}=(-2\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}-\overline{b})=-2\overline{a}\cdot\overline{a}+\overline{b}\cdot\overline{a}+2\overline{a}\cdot\overline{b}-\overline{b}\cdot\overline{b}=$

$=-2\overline{a}^2+\overline{a}\,\overline{b}+2\overline{a}\,\overline{b}-\overline{b}^2=-2\overline{a}^2+3\overline{a}\,\overline{b}-\overline{b}^2=$

$=-2|\overline{a}|^2+3|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot cos<(\overline{a}\,\overline{b})-2|\overline{b}|^2=$

$=-2\cdot(4\sqrt{2})^2+3\cdot(4\sqrt{2})\cdot8\,cos\frac{\pi}{4}-8^2=-64+96\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-64=-32$.

Ответ: –32.

Пример 10. Найти длину вектора $\overline{c}=-\overline{a}+3\overline{b}$, если $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=2$, $<(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{3}$.

Решение будет следующим:

$\overline{|c|}=|-\overline{a}+3\overline{b}|=\sqrt{\left(-\overline{a}+3\overline{b}\right)^2}=\sqrt{\overline{a}^2-6\overline{a}\overline{b}+9\overline{b}^2}=$

$\sqrt{|\overline{a}|^2-6|\overline{a}||\overline{b}|\cdot cos<(\overline{a};\overline{b})+9|\overline{b}|^2}=$

$=\sqrt{3^2-6\cdot3\cdot2\cdot cos\frac{\pi}{3}+9\cdot2^2}=\sqrt{9-36\cdot\frac{1}{2}+36}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$

Ответ: $3\sqrt{3}$.

6) Угол между векторами

Рассмотрим нашу формулу $\overline{a}\cdot\overline{b}\ =\ |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos<(\overline{a};\overline{b})$. По правилу пропорции сбросим длины векторов в знаменатель левой части:

$\cos<(\overline{a};\overline{b})=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

В чём смысл данной формулы? Если известны длины двух векторов и их скалярное произведение, то можно вычислить косинус угла между данными векторами, а, следовательно, и сам угол.

Скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$– это число. Длины векторов $|\overline{a}|,|\overline{b}|$– числа. Значит, дробь $\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$ тоже является некоторым числом *X*. А если известен косинус угла: $\cos<(\overline{a};\overline{b})=X$, то с помощью обратной функции легко найти и сам угол: $<(\overline{a};\overline{b})=arccos\,X$.

Пример 11. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=2\sqrt{2}$, $\overline{a}\cdot\overline{b}=8$.

Решение: Используем формулу:

$\cos<(\overline{a};\overline{b})=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\frac{8}{4\cdot2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$

Итак, если $\cos<(\overline{a};\overline{b})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, то: $<(\overline{a};\overline{b})=arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$

Значения обратных тригонометрических функций можно находить по тригонометрической таблице.

$<(\overline{a};\overline{b})=arcos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}=45^0.$

Ответ: 45^0.

Координаты вектора. Рассмотрим правила, которые позволяют по координатам данных векторов найти координаты их суммы и разности, а также координаты произведения данного вектора на данное число.

1^0. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если $a\{x_1,y_1,z_1\}$ и $b\{x_2, y_2,z_2\}$ - данные векторы, то вектор $a+b$ имеет координаты $\{x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2\}$.

2^0. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если $a\{x_1,y_1,z_1\}$ и $b\{x_2;y_2;z_2\}$ - данные векторы, то вектор ab имеет координаты $\{x_1–x_2, y_1–y_2, z_1–z_2\}$.

3^0. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Другими словами, если $a\{x;y;z\}$ – данный вектор, α – данное число, то вектор αa имеет координаты $\{\alpha x;\alpha y;\alpha z)$.

Утверждения 1^0–3^0 доказываются точно так же, как и для векторов на плоскости.

Рассмотренные правила позволяют находить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов, координаты которых известны. Рассмотрим пример.

Задача. Найти координаты вектора $p = 2a - 1/3b + c$, если $a\{1; -2;0\}$, $b\{0;3; -1\}$, $c\{-2;3;1\}$.

Решение: По правилу 3^0 вектор $2a$ имеет координаты $\{2; -4; 0\}$, а вектор $(-1/3b)$ – координаты $\{0; -1; 2\}$. Так как $p = 2a - 1/3b + c$, то его координаты $\{x; y;z\}$ можно вычислить по правилу 1^0:

$x = 2 + 0 - 2=0$,

$y = -4 - 1 + 3= -2$,

$z = 0+2+1=3$.

Итак, вектор p имеет координаты $\{0; -2; 3\}$.

Ответ: $\{0; -2; 3\}$.

Самостоятельная работа

1. Даны 3 вершины A(3, –4,7), B(–5,3, –2), C(1,2, –3) параллелограмма ABCD. Найти его вершину D.
2. Даны 2 смежные вершины параллелограмма A(–2,6), B(2,8) и точка пересечения его диагоналей M(2,2). Найти 2 его другие вершины.
3. На оси абсцисс найти тоску M, расстояние до которой от точки A(3, –3) равно 5.
4. На оси ординат найти точку M, равноудаленную от точек A(1, –4,7) и B(5,6, –5).
5. Даны вершины треугольника A(3, –1,5). B(4,2, –5), C(–4,0,3). Найти длину медианы, проведенной из вершины A.
6. Треугольник задан координатами своих вершин A(3, –2,1), B(3,1,5), C(4,0,3). Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.
7. Отрезок с концами в точках A(3, –2) и B(6,4) разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.
8. Определить координаты концов отрезка, который точками C(2,0,2) и D(5, –2,0) разделен на три равные части.
9. Даны точки A(1, –3, –2), B(8,0, –4), C(4,8, –3). Найти такую точку D, чтобы четырехугольник ABCD был параллелограммом.

Вариант 1

№п/п	Название операции	Формулы

1	Найти сумму векторов	$\vec{a}\{1;-2;3\}$, $\vec{b}\{4;0;-1\}$ $\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2\,;\ y_1+y_2\,;\ z_1+z_2\}$
2	Найти разность векторов	$\vec{a}\{4;1;-3\}$, $\vec{b}\{0;-5;2\}$ $\vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2\,;\ y_1-y_2\,;\ z_1-z_2\}$
3	Найти произведение вектора на число	$\vec{a}\{-1;3;1\}$, $\delta -$ число $\delta=-3$ $\delta\vec{a}\{\delta x;\ \delta y\,;\delta z\}$
4	Вычислить координаты середины отрезка	Точка А$(1;2;-3)$ Точка В (-3;4;-1) Точка С-середина отрезка АВ. С$(x_c;y_c;z_c)$ $x_c=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_c=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z_c=\frac{z_1+z_2}{2}$
5	Найти координаты вектора	Точка А$(5;0;-3)$. Точка В (-1;4;-7).Находим координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\{x_2-x_1\,;y_2-y_1;\,z_2-z_1\}$
6	Найти длину вектора	$\vec{a}\{5;1;-1\}$ $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7	Вычислить скалярное произведение векторов	$\vec{a}\{-2;3;7\}$, $\vec{b}\{-9;0;2\}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$
8	Найти косинус угла между векторами	$\vec{a}\{2;0;1\}$, $\vec{b}\{-3;1;2\}$ $\cos\alpha=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
9	При каких значениях m и n векторы коллинеарны?	$\vec{a}\{m;3;1\}$, $\vec{b}\{1;n;2\}$ $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=k$
10	Проверьте перпендикулярность векторов	$\vec{a}\{-4;0;1\}$, $\vec{b}\{2;7;8\}$ $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$ - условие перпендикулярности векторов

Вариант 2

№п/п	Название операции	Формулы
1	Найти сумму векторов	$\vec{a}\{2;-3;4\}$, $\vec{b}\{-1;2;0\}$ $\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2\,;\ y_1+y_2\,;\ z_1+z_2\}$
2	Найти разность векторов	$\vec{a}\{4;-5;7\}$, $\vec{b}\{3;-1;2\}$ $\vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2\,;\ y_1-y_2\,;\ z_1-z_2\}$
3	Найти произведение на число	$\vec{a}\{-2;4;0\}$, $\delta -$ число $\delta=-4$ $\delta\vec{a}\{\delta x;\ \delta y\,;\delta z\}$

4	Вычислить координаты середины отрезка	Точка А$(-3;1;2)$ Точка В (2;-3;1) Точка С-середина отрезка АВ. С$(x_c;y_c;z_c)$ $x_c=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y_c=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $z_c=\dfrac{z_1+z_2}{2}$
5	Найти координаты вектора	Точка А$(6;-3;4)$. Точка В (1;-4;7). Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1;y_2-y_{1;}\,z_2-z_1\}$
6	Найти длину вектора	$\vec{a}\{7;2;-1\}$ $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7	Вычислить скалярное произведение векторов	$\vec{a}\{-3;2;9\}$, $\vec{b}\{-7;0;3\}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$
8	Найти косинус угла между векторами	$\vec{a}\{4;1;0\}$, $\vec{b}\{-5;3;1\}$ $\cos\alpha=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
9	При каких значениях m и n векторы коллинеарны?	$\vec{a}\{m;5;3\}$, $\vec{b}\{2;n;4\}$ $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=k$
10	Проверьте перпендикулярность векторов	$\vec{a}\{0;\ -3;2\}$, $\vec{b}\{9;4;6\}$ $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$ - условие перпендикулярности векторов

Требования к оформлению практической работы
Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:
1) Что называется вектором?
2) Что называется скалярным произведением векторов?
3) Как найти длину вектора?

Практическое занятие по теме «Основные тригонометрические тождества. Преобразования простейших тригонометрических выражений»

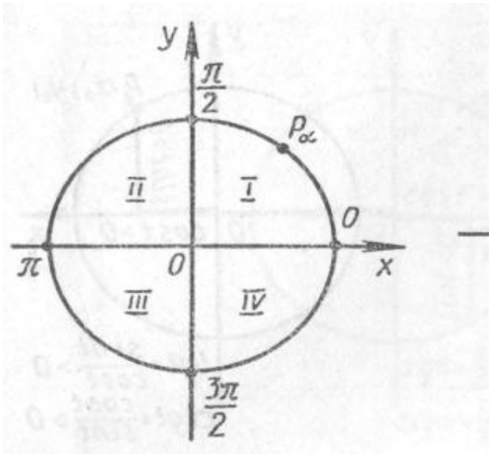
Цель: рассмотреть основные тригонометрические тождества и научиться применять при преобразовании простейших тригонометрических выражений.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Рассмотрим прямоугольную систему координат и в ней единичную окружность.



Оси координат делят множество точек плоскости на четыре четверти, которые нумеруются, как показано на рисунке:
I четверть от 0 до $\frac{\pi}{2}$; II четверть от $\frac{\pi}{2}$ до π;
III четверть от π до $\frac{3\pi}{2}$; IV четверть от $\frac{3\pi}{2}$ до 2 π.

Таким образом, мы отметили, что каждая точка числовой окружности имеет свои координаты, т.е.

I четверть: $x > 0$, $y > 0$;
II четверть: $x<0$, $y>0$;
III четверть: $x<0$, $y<0$;
IV четверть: $x>0$, $y< 0$.

Составим таблицу знаков:

четверть / функция	I четверть 0 - $\frac{\pi}{2}$	II четверть $\frac{\pi}{2}$ - π	III четверть π - $\frac{3\pi}{2}$	IV четверть $\frac{3\pi}{2}$ - 2 π
sin α (ось *x*)	+	+	–	–
cos α (ось *y*)	+	–	–	+
tg α	+	–	+	–
ctg α	+	–	+	–

Уравнение числовой окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = 1$. Следовательно, получим важное равенство связывающие *sin α* и *cos α*: $\boldsymbol{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$. Это тождество называют *основным тригонометрическим тождеством*. Данное тождество показывает, что зная значение одной из функции *sin α* или *cos α* можно найти соответствующее значение другой из них.

- ☞ Если известно значение *cos α*, то $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.
- ☞ Если известно значение *sin α*, то $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.

Чтобы найти значения $sin\ \alpha$ или $cos\ \alpha$ надо еще знать, какой четверти принадлежит данная точка единичной окружности (см. таблицу знаков).

Пример 1. Известно, что $sin\ t = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти соответствующие значения $cost$, $tg\ t$, $ctg\ t$.

Решение: Из основного тригонометрического тождества $sin^2\ t + cos^2\ t = 1$ находим

$$cos\ t = \sqrt{1 - sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25} - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Т.к. $cos\ t$ находится во II четверти и < 0, то $cos\ t = -\frac{4}{5}$;

$$tg\ t = \frac{sin\ t}{cos\ t} = \frac{3}{5} : \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4}; \quad ctg\ t = \frac{cos\ t}{sin\ t} = -\frac{4}{5} : \frac{3}{5} = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $cos\ t = -\frac{4}{5}$; $tg\ t = -\frac{3}{4}$; $ctg\ t = -\frac{4}{3}$.

Тригонометрические функции связаны между собой следующими основными тождествами:

1. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$. Из этого тождества вытекают формулы:

а) $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$ и б) $sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$.

2. $tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$.
3. $ctg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha}$.
4. $tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1$.
5. $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$.
6. $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$.

Пример 2. Упростить выражения:

а) $sin^2x + cos^2x + ctg^2x$.

Решение: Используя тождества 1 и 6, получим

$$sin^2x+cos^2x+ctg^2x=(sin^2x+cos^2x)+ctg^2x = 1 + ctg^2x = \frac{1}{sin^2\alpha}.$$

б) $\frac{1-cos^2 x}{1-sin^2 x} + tg\ x \cdot ctg\ x$.

Решение: Применив формулы

$1 - cos^2x = sin^2x$ и

$1 - sin^2x = cos^2x$ и тождества 4 и 6, находим

$$\frac{1-cos^2 x}{1-sin^2 x} + tg\ x \cdot ctg\ x = \frac{sin^2 x}{cos^2 x} + 1 = tg^2x + 1 = \frac{1}{cos^2 x}.$$

в) $(tg\ x + ctg\ x)^2 - (tg\ x - ctg\ x)^2$.

Решение: Воспользуемся формулами квадрата суммы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ и разности $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ получим:

$(tgx + ctgx)^2 - (tgx - ctgx)^2 = tg^2x + 2tgx \cdot ctgx + ctg^2x - tg^2x + 2tgx \cdot ctgx - ctg^2x =$ (после приведения подобных членов применим тождество 4)

$= 4tg\ x \cdot ctg\ x = 4 \cdot 1 = 4$.

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Перечислите основные тригонометрические тождества.
2) Дайте определение числовой окружности.

3) Что называется градусом? Каковы соотношения между градусом, минутой, секундой?

Практическое занятие по теме «Формулы сложения. Формулы приведения»

Цель: рассмотреть основные формулы сложения и приведения и научиться применять при преобразовании простейших тригонометрических выражений.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Значения тригонометрических функций острых углов вычисляют по таблицам. Значения любых углов можно вычислить с помощью формул приведения к острому углу.

Синус и косинус суммы и разности аргументов:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta + \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta + \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\cos\alpha)^2$$

$$tg2\alpha = \frac{2\cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Формулы понижения степени:

$$(\sin\alpha)^2 = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$(\cos\alpha)^2 = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Формулы приведения

α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ (90^0 - α)	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ (90^0 + α)	$\pi-\alpha$ (180^0-α)	$\pi+\alpha$ (180^0+α)	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ (270^0 -α)	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ (270^0+α)	$2\pi-\alpha$ (360^0 -α)	$2\pi+\alpha$ (360^0+α)
$sin\alpha$	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$
$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$cos\alpha$	$cos\alpha$
$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

Среди тригонометрических функций имеется только одна чётная функция $y = cosx$. Для неё справедливо равенство $cos(-x) = cos\,x$. Все остальные функции $y = sinx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ являются нечётными. Для них справедливы равенства $sin(-x) = -sinx$, $tg(-x) = -tg\,x$, $ctg(-x) = -ctg\,x$.

Самостоятельная работа

Вариант 1	**Вариант 2**
Вычислить выражение, используя формулы синус и косинус суммы и разности аргументов: $sin\,105^0$	Вычислить выражение, используя формулы синус и косинус суммы и разности аргументов: $cos\,15^0$
Упростить выражение, используя формулы синус и косинус суммы и разности аргументов: $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\frac{1}{2}\sin\alpha$ $\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)$ $\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta$ $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$	Упростить выражение, используя формулы синус и косинус суммы и разности аргументов: $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$ $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\sin\beta$ $\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)$ $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$
Найдите значение выражения, используя формулы синус и косинус суммы и разности аргументов: $\cos 107^0\cos 107^0+\sin 107^0\sin 17^0$ $\sin 63^0\cos 27^0+\cos 63^0\sin 27^0$ $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$ $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$ $\frac{\cos 105^0\cos 5^0+\sin 105^0\cos 85^0}{\sin 95^0\cos 5^0-\cos 95^0\sin 185^0}$	Найдите значение выражения, используя формулы синус и косинус суммы и разности аргументов: $\cos 36^0\cos 24^0-\sin 36^0\sin 24^0$ $\sin 51^0\cos 21^0-\cos 51^0\sin 21^0$ $\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$ $\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{15}\sin\frac{\pi}{5}$ $\frac{\sin 75^0\cos 5^0-\cos 75^0\cos 85^0}{\cos 375^0\cos 5^0-\sin 15^0\sin 365^0}$
Докажите тождество используя формулы синус и косинус суммы и разности аргументов:	Докажите тождество используя формулы синус и косинус суммы и разности аргументов:

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)=$ $=\sin\beta\cos\alpha$ $\sin(30^0-\alpha)$ $-\cos(60^0-\alpha)$ $=-\sqrt{3}\sin\alpha$	$\cos(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\sin(-\beta)=$ $=\cos\alpha\cos\beta$ $\sin(30^0-\alpha)\quad+\sin(30^0+\alpha)=\cos\alpha$
Упростить выражение, используя формулы двойного аргумента: $2\sin 15^0\cos 15^0$ $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha$ $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=-\sin\alpha$ $(\cos 15^0+\sin 15^0)^2$	5.Упростить выражение, используя формулы двойного аргумента: $(\cos\alpha)^2-\cos 2\alpha$ $\frac{\sin 6\alpha}{(\cos 3\alpha)^2}$ $(\cos 75^0-\sin 75^0)^2$ $(\cos 15^0)^2-(\sin 15^0)^2$
6. Известно, что $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ Найдите: $\sin 2\alpha,\quad\cos 2\alpha$	6. Известно, что $\cos\alpha=0{,}8$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ Найдите: $\sin 2\alpha,\quad\cos 2\alpha$
7. Известно, что $\cos\alpha=\frac{2}{3}$. $\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ Найдите: $sin\frac{\alpha}{2}$, $cos\frac{\alpha}{2}$	7. Известно, что $\cos\alpha=\frac{3}{4}$. $\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ Найдите: $sin\frac{\alpha}{2}$, $cos\frac{\alpha}{2}$
8. Представить в виде произведения: $\sin 40^0+\sin 16^0$ $\sin 20^0-\sin 40^0$ $\cos 15^0+\cos 45^0$ $\cos 46^0-\cos 74^0$	8.Представить в виде произведения: $\sin 10^0+\sin 50^0$ $\sin 52^0-\sin 36^0$ $\cos 20^0+\cos 40^0$ $\cos 75^0-\cos 15^0$
9. Представить в виде произведения: $\frac{1}{2}-\cos\alpha$ $\cos\alpha+\sin\alpha$ $\frac{\cos 68^0-\cos 22^0}{\sin 68^0-\sin 22^0}$	9.Представить в виде произведения: $\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\alpha$ $\sin\alpha$ - $\cos\alpha$ $\frac{\sin 130^0+\sin 110^0}{\cos 130^0+\cos 110^0}$
10. Используя формулы приведения, вычислить: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$; $\cos(2\pi-t)$; $\sin(\pi+t)$; $\cos(90^0-\alpha)$; $\sin(360^0-\alpha)$; $\sin(270^0+\alpha)$; $tg(270^0+\alpha)$; $ctg(360^0+\alpha)$; $\sin(90^0-\alpha)+\cos(180^0+\alpha)+tg(270^0+\alpha)+ctg($ $\frac{\sin(\pi-t)\cos(2\pi-t)}{tg(\pi-t)\cos(\pi-t)}$; $\frac{\sin(-\alpha)ctg(-\alpha)}{\cos(360^0-\alpha)tg(180^0+\alpha)}$;	10. Используя формулы приведения, вычислить: $\sin(\pi-t)$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$; $\cos(2\pi+x)$; $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$; $\cos(180^0+\alpha)$; $tg(90^0-\alpha)$; $ctg(180^0-\alpha)$; $\frac{\cos(180^0+\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90^0+\alpha)}$; $\frac{\sin(\pi+t)\sin(2\pi+t)}{tg(\pi+t)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)}$;

	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\cos(\pi-t)+tg(\pi-t)+ctg\left(\frac{\pi}{2}-t\right);$

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Запишите формулы сложения функций.
2) Перечислите формулы двойных углов.
3) Сформулируйте правило написания формул приведения.

Практическое занятие по теме «Решение простейших тригонометрических уравнений»

Цель: рассмотреть простейшие тригонометрические уравнения, научиться решать используя стандартные формулы.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

С помощью обратных тригонометрических функций можно решать простейшие тригонометрические уравнения:

$\sin x = a,\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z;$

$\sin x = -a,\ x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.\ |a| \le 1.$

Корни уравнения $\sin x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ можно находить по более простым формулам:

$\sin x = 0$	$x = \pi n,\ n \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$\cos x = a,\ x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.\ |a| \le 1.$

Корни уравнения $\cos x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ можно находить по более простым формулам:

$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$\cos x = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

$tg\, x = a$, $x = arctg\, a + \pi n$, $n \in Z$, a – любое число.
$ctg\, x = a$, $x = arcctg\, a + \pi n$, $n \in Z$, a – любое число.

Пример 1. Решить простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение: Согласно формуле 1, получим

$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: По формуле 2, находим

$x = \pm \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 2\pi n,\ n \in Z.$

$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

в) $\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: По формуле 1, где $\sin x = -a$, находим

$4x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n,\ n \in Z,$

$4x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,$

$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} : 4 + \pi n : 4,\ n \in Z.$

$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{16} + \frac{\pi п}{4},\ n \in Z.$

Ответ: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{16} + \frac{\pi п}{4},\ n \in Z.$

г) $\cos\ (\frac{\pi}{2} - 2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

$\frac{\pi}{2} - 2x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,$

$-2x = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$

$x = -\frac{\pi}{2} : (-2) \pm \frac{\pi}{6} : (-2) + 2\pi n : (-2),$

$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12} - 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12} - 2\pi n,\ n \in Z.$

Самостоятельная работа Решить простейшие тригонометрические уравнения а) $sin\ 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $cos\ (-\frac{x}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $sin\ (2x - \frac{\pi}{6}) = 0$; г) $sin\ (\frac{\pi}{2} - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

а) $cos\ 2x = -\frac{1}{2}$; б) $sin\ (-\frac{x}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $sin\ (\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}) = 1$; г) $cos\ (\frac{\pi}{2} - 3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) $sin\ \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $tg\ (-2x) = \sqrt{3}$; в) $cos\ (2x + \frac{\pi}{2}) = 0$; г) $sin\ (\pi - 3x) = \frac{1}{2}$.

а) $cos\ \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; б) $cos\ (-4x) = 1$; в) $cos\ (\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}) = 1$; г) $cos\ (2\pi - 3x) = -\frac{1}{2}$.

а) $cos\ 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $tg\ (-\frac{x}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $cos\ (2x - \frac{\pi}{4}) = 1$; г) $sin\ (\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

а) $sin\ \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $cos\ (-\frac{x}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $sin\ (\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}) = 0$; г) $cos\ (\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}) = \frac{1}{2}$.

а) $tg\ x = 1$; б) $tg\ x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $ctg\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $ctg\ x = \sqrt{3}$

а) $tg\ 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $ctg\ (-\frac{x}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $tg\ (2x - \frac{\pi}{6}) = 0$; г) $ctg\ (\frac{\pi}{2} - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

а) $tg\ 2x = -\frac{1}{2}$; б) $ctg\ (-\frac{x}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $ctg\ (\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}) = 1$; г) $ctg\ (\frac{\pi}{2} - 3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) $ctg\ \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $tg\ (-2x) = \sqrt{3}$; в) $tg\ (2x + \frac{\pi}{2}) = 0$; г) $ctg\ (\pi - 3x) = \frac{1}{2}$.

а) $tg\ \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; б) $tg\ (-4x) = 1$; в) $ctg\ (\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}) = 1$; г) $ctg\ (2\pi - 3x) = -\frac{1}{2}$.

Требования к оформлению практической работы
Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:
1) Что называется арксинусом, арккосинусом, арктангенсом угла?
2) Перечислите формулы решения простейших тригонометрических уравнений.
3) Выпишите в тетрадь таблицу значений тригонометрических функций некоторых углов.

Практическое занятие по теме «Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям»

Цель: рассмотреть методы решения тригонометрических уравнений.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Определение: Уравнение называется тригонометрическим, если неизвестная величина входит в него как аргумент тригонометрической функции.

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений:

$sin\ x = a,\ x = arcsin\ a + \pi n,\ n \in$ Z.

$cos\ x = a,\ x = \pm\ arccos\ a + 2\ \pi n,\ n \in$ Z.

$tg\ x = a,\ x = arctg\ a + \pi n,\ n \in$ Z.

$ctg\ x = a,\ x = arcctg\ a + \pi n,\ n \in$ Z.

Метод сведения к квадратному уравнению состоит в том, что, пользуясь изученными формулами надо преобразовать уравнения к такому виду, чтобы какую-то функцию (например,) обозначить через $\underline{y}$, получив при этом квадратное уравнение относительно $\underline{y}$.

Пример 1. Решить уравнение $sin^2\ x + sin\ x - 2 = 0$.

Решение: Это уравнение является квадратным относительно $sin\ x$. Обозначив $sinx = y$, получим квадратное уравнение

$y^2 + y - 2 = 0.$

$D = b^2 - 4\ ac = 9,$

$y_1 = 1$, $y_2 = -2$. Таким образом, решение тригонометрического уравнения свелось к решению простейших уравнений $sin\ x = 1$ и $sin\ x = -2$.

1) уравнение $sin\ x = 1$ имеет корни $x = -\frac{\pi}{2} + 2\ \pi n,\ n \in Z$;

2) уравнение $sin\ x = -2$ не имеет корней, т.к. $a \leq |1|$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\ \pi n,\ n \in Z$

Пример 2. Решить уравнение $2\ cos^2 x - 5sin\ x + 1 = 0$.

Решение: Заменяя

$cos^2 x = 1 - sin^2 x$, получим:

$2(1 - sin^2 x) - 5sinx + 1 = 0$, или

$2sin^2 x - 5sinx - 3 = 0$. Обозначая

$sin\ x = y$, получим

$2y^2 - 5y - 3 = 0.$

$D = b^2 - 4\ ac = 49,$

$y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -3$.

1) $sin\ x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$. 2) $sin\ x = -3$ не имеет корней, т.к. $a \leq |1|$.

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение $2\ sin^2 x - cos\ x - 1 = 0$.

Решение: Используя формулу

$sin^2 x = 1 - cos^2 x$, получаем:

$2\ (1 - cos^2 x) - cos\ x - 1 = 0$, или

$2\ cos^2 x + cos\ x - 1 = 0$.

$cos\ x = y$,

$2y^2 + y - 1 = 0.$
$D = b^2 - 4\,ac = 9,$
$y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = 1.$
1) $\cos x = -\frac{1}{2}, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$ 2) $\cos x = 1, x = 2\pi n, n \in Z.$
Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; 2\pi n, n \in Z.$
Пример 4. Решить уравнение $3\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$
Решение: Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Обозначив $\cos x = y$, получим квадратное уравнение
$3y^2 + 2y - 1 = 0.$
$D = b^2 - 4\,ac = 16,$
$y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{3}.$
Таким образом, решение тригонометрического уравнения свелось к решению простейших уравнений $\cos x = -1$ и $\cos x = \frac{1}{3}$.
1) $\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$
2) $\cos x = \frac{1}{3}, x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z.$
Ответ: $\pi + 2\pi n, n \in Z; \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z.$
Пример 5. Решить уравнение: $3sin^2x - 2\sqrt{3}\,sinxcosx + 5cosx = 2$
Решение: С числом 2, содержащимся во правой части, поступим следующим образом. Известно, что $sin^2x + cos^2x = 1$ - это тождество верно для любого значения x. Тогда
$2(sin^2x + cos^2x) = 2sin^2x + 2cos^2x = 2.$
Заменив в первом уравнении 2 на $2\sin^2 x + 2\cos^2 x$, получим:
$3sin^2x - 2\sqrt{3}\,sinx \cdot cosx + 5cos^2x = 2sin^2x + 2cos^2x$
$3sin^2x - 2\sqrt{3}\,sinx \cdot cosx + 5cos^2x - 2sin^2x - 2cos^2x = 0$
$sin^2x - 2\sqrt{3}\,sinxcosx + 3\,cos^2x = 0$
Обе части уравнения разделим на cos^2x почленно
$$\frac{sin^2x}{cos^2x} - \frac{2\sqrt{3}\,sinxcosx}{cos^2x} + \frac{3\,cos^2x}{cos^2x} = 0$$
Так как $\frac{sinx}{cosx} = tgx$, то полученное уравнение запишем в виде:
$tg^2x - 2\sqrt{3}\,tgx + 3 = 0$
Введя новую переменную $t = tgx$, получим квадратное уравнение:
$t^2 - 2\sqrt{3}\,t + 3 = 0$, решая уравнение, получим:
$t = \sqrt{3}$. Итак,
$tg\,x = \sqrt{3}$;
$x = \text{arctg}\sqrt{3} + \pi n,$
$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$
Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Самостоятельная работа

1 Вариант

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$
$2\sin^2 x + \sin x - 6 = 0.$
$3 - 4\sin^2 x = 0.$
$\sin^2 x - \sin x = 0.$
$2\cos^2 x + \cos x = 0.$
$2\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0.$
$4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0.$
$5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0.$
$\cos^2 x + 3\sin x = 3.$
$4\cos x = 4 - \sin^2 x.$
$\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0.$
$\cos^2 x + \cos x = -\sin^2 x$
$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin x \cdot \cos x$
$(\sin x + \cos x)^2 - 1 = 0$
$3\sin^2 x = \cos^2 x.$

2 Вариант

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$
$2\cos^2 x + \cos x - 6 = 0.$
$3 - 4\cos^2 x = 0.$
$\cos^2 x + \cos x = 0.$
$2\sin^2 x + \sin x = 0.$
$4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0.$
$6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$
$6\cos^2 x + \sin x + 1 = 0.$
$8\sin^2 x + \cos x + 1 = 0.$
$2\cos^2 x = -(\sin x + 1)$
$2\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x.$
$\sin^2 x - 6\sin x = 0$
$(\sin x + 1)^2 = \sin^2 x + 1$
$(\sin x - \cos x)^2 - 1 = 0.$
$2\sin^2 x = 3\cos x.$

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Какие уравнения называются тригонометрическими?
2) При каких значениях уравнение не имеет решений?
3) Перечислите формулы решения простейших тригонометрических уравнений.

Практическое занятие по теме «Графики и основные свойства элементарных функций»

Цель: рассмотреть основные виды графиков, их свойства, промежутки возрастания и убывания.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

В ходе изучения математики без знания графиков основных элементарных функций придётся тяжело, поэтому очень важно вспомнить, как выглядят графики параболы, гиперболы, синуса, косинуса и т.д., запомнить некоторые значения функций. Также речь пойдет о некоторых свойствах основных функций.

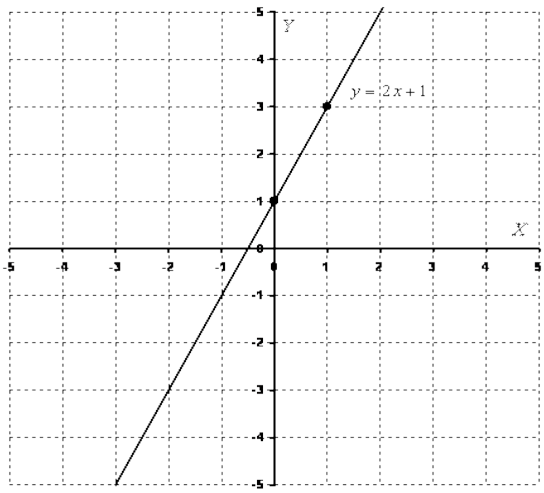
График линейной функции. Линейная функция задается уравнением $y = kx + b$. График линейной функций представляет собой прямую. Для того, чтобы построить прямую достаточно знать две точки. При оформлении чертежа всегда подписываем графики.

Пример 1. Построить график функции $y = 2x + 1$. Найдем две точки. В качестве одной из точек выгодно выбрать ноль.

При оформлении заданий координаты точек обычно сводятся в таблицу:

x	0	1
y	1	3

Две точки найдены, выполним чертеж:



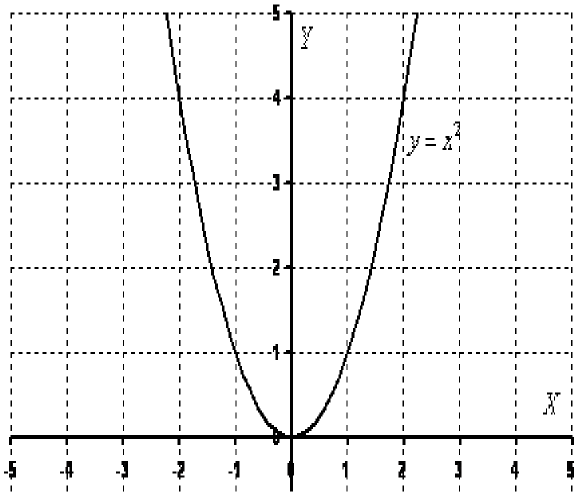
Не лишним будет вспомнить частные случаи линейной функции:

1) Линейная функция вида $y = ax$ ($a \neq 0$) называется прямой пропорциональностью. График прямой пропорциональности всегда проходит через начало координат. Например, $y = -\frac{x}{2}$.

2) Уравнение вида $y = b$ задает прямую, параллельную оси OX, в частности, сама ось OX задается уравнением $y = 0$. График функции строится сразу, без нахождения точек. То есть, запись $y = -4$ следует понимать так: «игрек всегда равен – 4, при любом значении икс».

3) Уравнение вида $x = b$ задает прямую, параллельную оси OY, в частности, сама ось OY задается уравнением $x=0$. График функции также строится сразу. Запись $x=1$ следует понимать так: «икс всегда, при любом значении игрек, равен 1».

Парабола. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c=0$ ($a \neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим случай: $y = x^2$



Свойства функции:

1) Область определения – любое действительное число, $D(f) = R$
2) Область значений – это множество всех значений, $E(f) = [0; +\infty)$
3) Функция $y=x^2$ является чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси OY.
4) Функция $y=x^2$ не ограничена сверху.

Пример 2. Построить график функции $f(x) = -x^2+2x$.

Решение: В этом примере мы рассмотрим важный технический вопрос: Как быстро построить параболу? В практических заданиях необходимость начертить параболу возникает очень часто, в частности, при вычислении площади фигуры с помощью определенного интеграла. Поэтому чертеж желательно научиться выполнять быстро, с минимальной потерей времени. Рассмотрим следующий алгоритм построения:

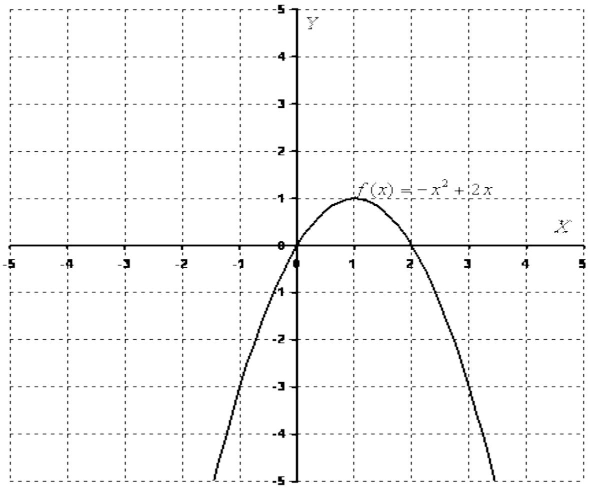
1) Сначала находим вершину параболы: $A(x_0;y_0)$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-2} =$; $y_0 = -(1)^2 + 5\cdot(1) = 1$; $y(0) = -0^2 + 2\cdot 0 = 0$. Таким образом, вершина находится в точке (1;1)

2) Теперь находим другие точки, при этом пользуемся симметричностью параболы. Следует заметить, что функция $f(x) = -x^2+2x$ – не является чётной, но, тем не менее, симметричность параболы никто не отменял.
3) Составим итоговую таблицу:

x	1	0	2	–1	3	–2	4
y	1	0	0	–3	–3	–8	–8

4) Выполним чертеж:

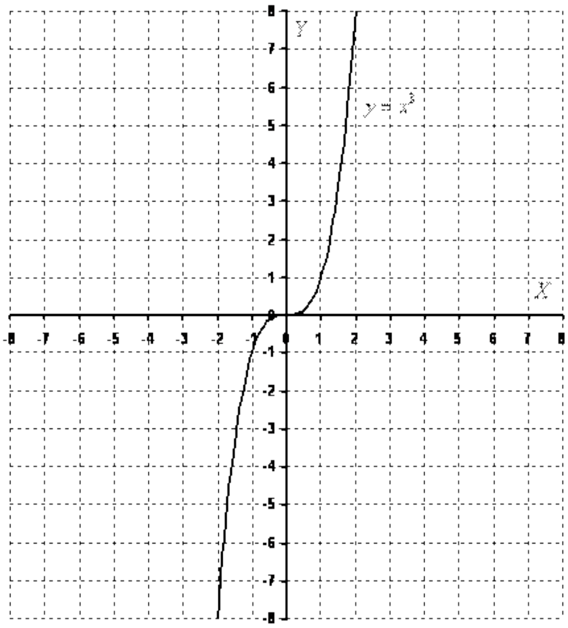


Для квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) справедливо следующее:

- ☞ Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх.
- ☞ Если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз.

Кубическая парабола. Кубическая парабола задается функцией $y=x^3$. Составим итоговую таблицу:

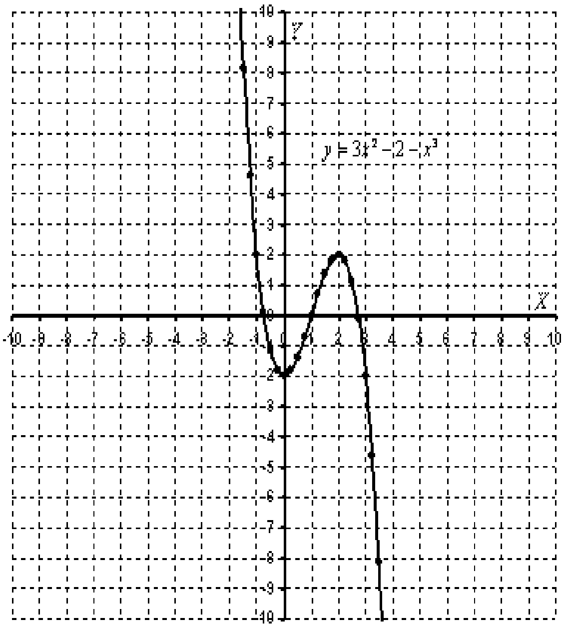
x	0	1	–1	2	–2
y	0	1	–1	8	–8



Основные свойства функции $y=x^3$.

1) Область определения – любое действительное число, $D(f) = R$
2) Область значений – это множество всех значений, $E(f) = R$
3) Функция $y=x^3$ является нечётной. Если функция является нечётной, то ее график симметричен относительно начала координат.
4) Функция $y=x^3$ не ограничена.

График функций-многочленов высоких степеней. График функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) принципиально имеет следующий вид:



В этом примере коэффициент при старшей степени $a<0$, поэтому график развёрнут «наоборот». Принципиально такой же вид имеют графики функций-многочленов 5-й, 7-й, 9-й и других нечетных степеней.

Функции-многочлены 4-й, 6-й и других четных степеней имеют график принципиально следующего вида:

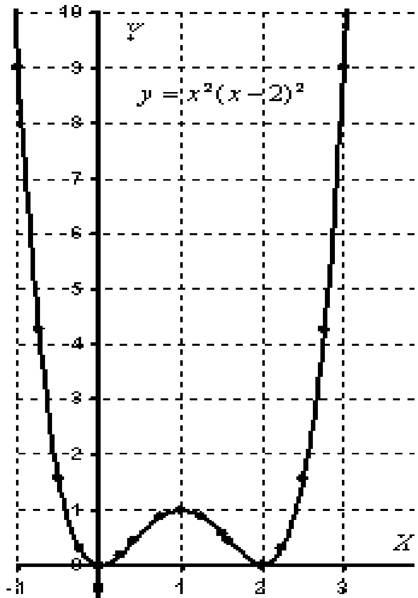
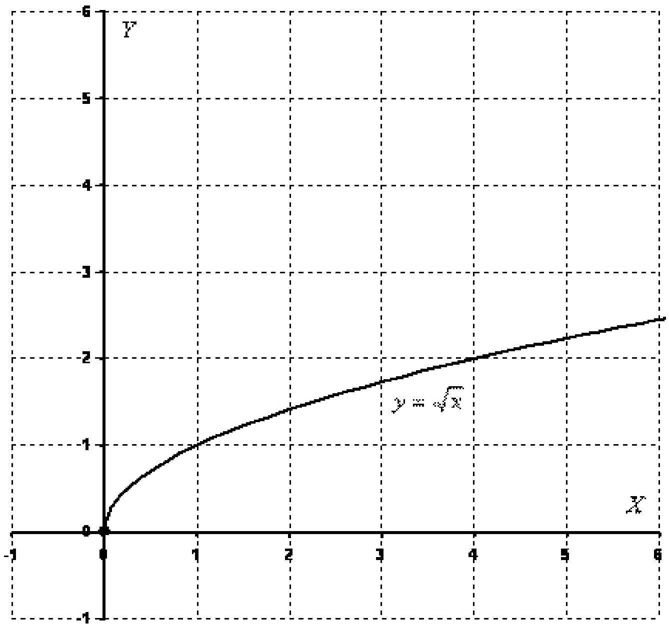


График функции $\boldsymbol{y=\sqrt{x}}$**.** Он представляет собой одну из ветвей параболы. При построении простейших графиков с корнями также уместен поточечный способ построения, при этом выгодно подбирать такие значения «икс», чтобы корень извлекался нацело:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

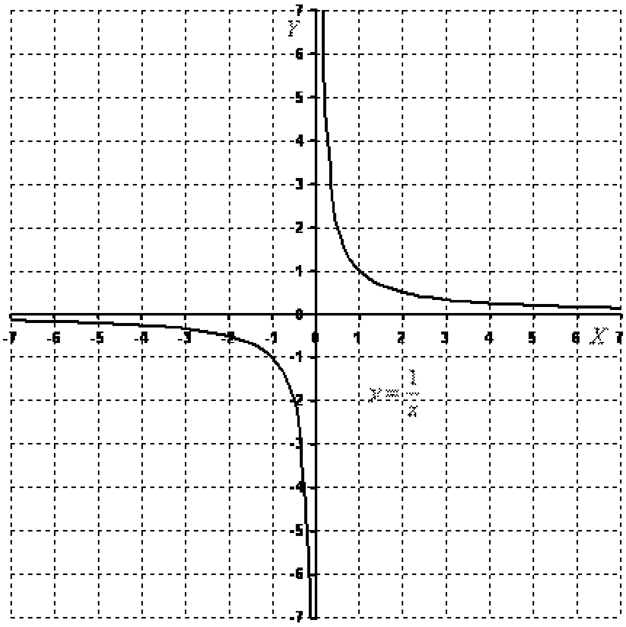
Выполним чертеж:



Основные свойства функции $y = \sqrt{x}$:

1) Область определения: $D(f) = [0;+\infty)$.
2) Область значений: $E(f) = [0;+\infty)$. То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти.
3) Функция $y = \sqrt{x}$ не ограничена сверху.

График гиперболы. Выполним чертеж:



Основные свойства функции $y = \frac{1}{x}$:

1) Область определения: $D(f) = (-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.
2) Область значений: $E(f) = (-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.
3) Прямая, к которой бесконечно близко приближается график какой-либо функции называется *асимптотой*.

- ✓ В данном случае ось *ОУ* является *вертикальной асимптотой* для графика гиперболы при $x \to 0$.
- ✓ Ось *ОХ* является *горизонтальной асимптотой* для графика функции $y = \frac{1}{x}$.

4) Функция $y = \frac{1}{x}$ является нечётной, а, значит, гипербола симметрична относительно начала координат.
5) График функции вида $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) представляют собой две ветви гиперболы.

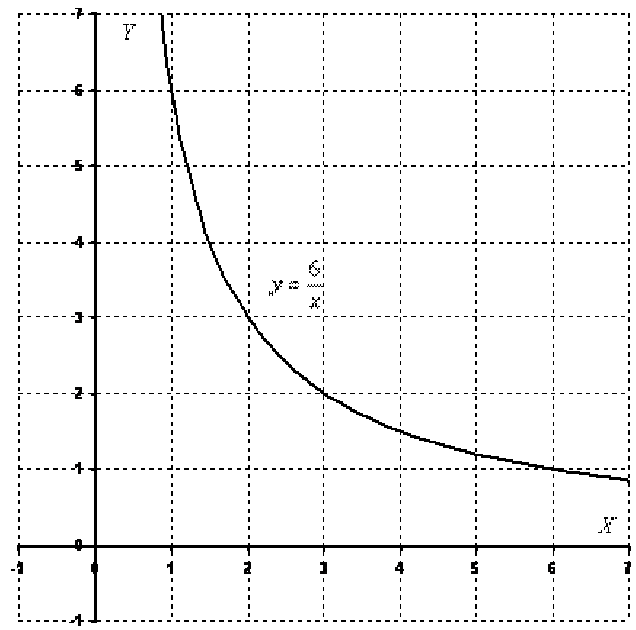
- ✓ Если $a > 0$, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях (см. рисунок выше).
- ✓ Если $a < 0$, то гипербола расположена во второй и четвертой координатных четвертях.

Пример 3. Построить правую ветвь гиперболы $y = \frac{6}{x}$

Используем поточечный метод построения, при этом, значения x выгодно подбирать так, чтобы делилось нацело:

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

Выполним чертеж:



Не составит труда построить и левую ветвь гиперболы, здесь как раз поможет нечетность функции. Грубо говоря, в таблице поточечного построения мысленно добавляем к каждому числу минус, ставим соответствующие точки и прочерчиваем вторую ветвь.

Показательная функция. Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где a - заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

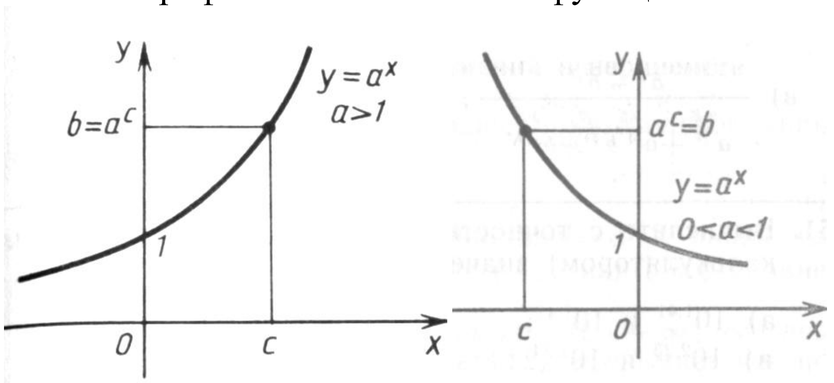
Показательная функция обладает следующими свойствами:

1) Область определения показательной функции - множество R всех действительных чисел: $D(y) = (-\infty; +\infty)$
2) Множество значений показательной функции - множество всех

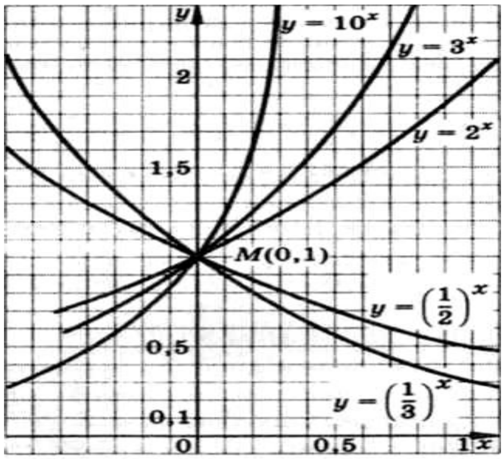
положительных чисел: $E(y) = (0; +\infty)$

3) Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$

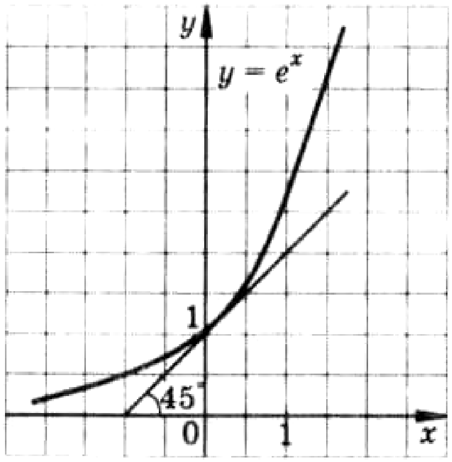
Графики показательных функций



Число е. Посмотрим на графики показательных функций при различных ***а***.



Все они проходят через точку M (0; 1). Проведем в этой точке касательные к графикам. Мы видим, что чем больше основание ***а,*** тем «круче» касательная. Так, при ***а = 2*** угловой коэффициент касательной равен 0,693, а при ***а*** = 10 угловой коэффициент касательной равен 2,303. Ясно, что при непрерывном изменении *а* от 2 до 10 угловой коэффициент касательной в точке ***М*** будет непрерывно меняться и найдется такое значение ***а,*** для которого этот коэффициент будет равен единице. Такое основание обозначается буквой ***е.*** Число ***е*** иррационально. Его приближенное значение таково: ***е*** ≈ 2,718. Итак, *е* - это такое число, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y = e^x$ в точке $x = 0$ равен единице, т. е. касательная в этой точке образует с осью абсцисс угол 45°.



Функцию $y = e^x$ часто обозначают $y = exp\ x$ (читается: «Экспонента от x») и называют ***экспонентой***. Экспонентами называют и функции более общего вида: $y = c\ e^x$

Логарифмическая функция. Функция, заданная формулой $\boldsymbol{y = log_a x}$ называют логарифмической функцией с основанием a.

Свойства логарифмической функции.

Функция рассматривается только при $a > 0$.

1) Областью определения функции $D(y)$ является множество положительных чисел R_+, т.е. $x > 0$.
2) Множество значений функции (-∞; +∞).
3) При $a>1$, функция возрастает на $D(y)$; при $0< a<1$, функция убывает на $D(y)$.
4) График логарифмической функции имеет вид:

Пример. Найти область определения функции:

а) $f(x) = log_8(4 - 5x)$

Решение: Область определения логарифмической функции – множество R_+. Поэтому рассматриваемая функция определена только для тех x, при которых

$4 - 5x > 0$;

$-5x > -4$, значит

$x < 0{,}8$. Следовательно, областью определения заданной функции является интервал

$(-\infty;0{,}8)$.

Ответ: $D(f) = (-\infty;0{,}8)$.

б) $f(x) = \ log_2(x^2 - 3x - 4)$

Решение: Область определения

$D(f) = R_+$, поэтому

$x^2 - 3x - 4 > 0$. Решая квадратное уравнение получим корни:

$x_1 = -1$; $x_2 = 4$. Методом интервалов определяем знаки на каждом из промежутков, получаем объединение интервалов

$(-\infty;-1) \cup (4; \infty)$.

Ответ: $D(f) = (-\infty;-1) \cup (4; \infty)$.

в) $f(x) = \ log_7 \frac{2x+3}{5-7x}$

Решение:

$D(f) = R_+$;

$\frac{2x+3}{5-7x} > 0$.

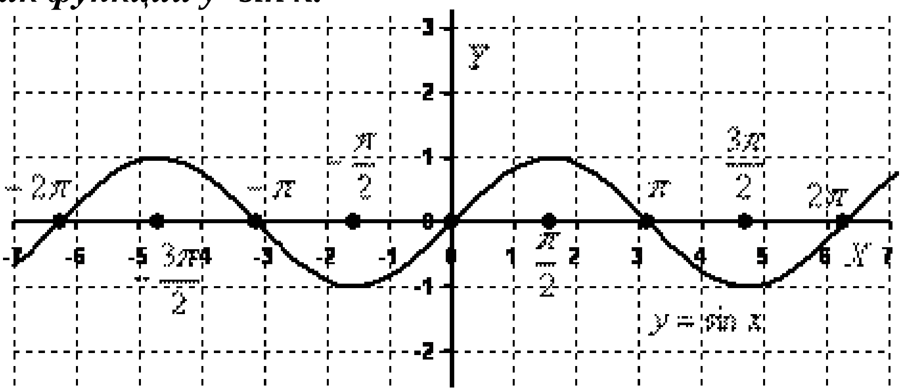
$(2x + 3)(5 - 7x) > 0$.

$x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{5}{7}$. Методом интервалов определяем знаки на каждом из промежутков, получаем объединение интервалов:

$(-\frac{3}{2}; \frac{5}{7})$.

Ответ: $D(f) = (-\frac{3}{2}; \frac{5}{7})$.

График функции y=sin x.



Данная линия называется *синусоидой*.

Основные свойства функции *y=sin x*:

1) Данная функция является периодической с периодом 2π.
2) Область определения: *D*(*f*) = *R*, то есть для любого значения «икс» существует значение синуса.
3) Область значений: *E*(*f*) = [–1;1]. Функция *y=sin x* является ограниченной: $-1 \le \sin x \le 1$, то есть, все «игреки» сидят строго в отрезке [–1;1].
4) Синус – это функция нечетная, синусоида симметричная относительно начала координат, и справедлив следующий факт:

   $\sin(-x) = -\sin x$.

   График косинуса. Построим график функции *y = cos x*.

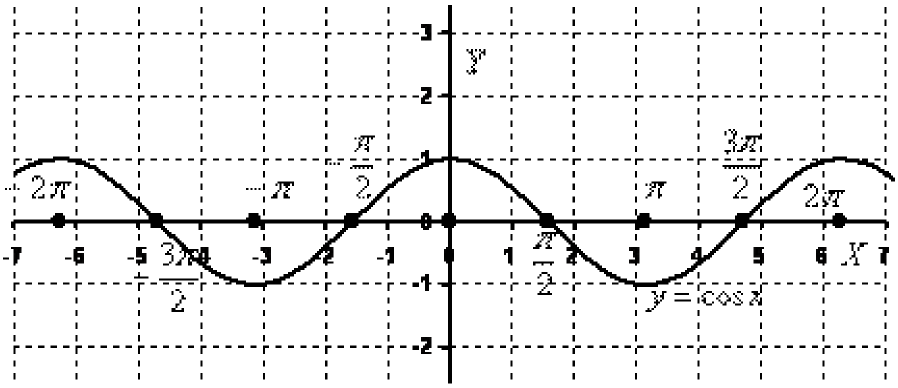


График косинуса – это та же самая синусоида, сдвинутая вдоль оси *OX* на $-\frac{\pi}{2}$ влево. Поэтому почти все свойства синуса справедливы и для косинуса. Косинус – это функция четная, её график симметричен относительно оси *OY*, и справедлив следующий факт: $cos\ (-x) = cos\ x$.

График тангенса. Построим график функции $y = tg\ x$.

Основные свойства функции $y = tg\ x$:

1) Данная функция является периодической с периодом π. То есть, достаточно рассмотреть отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, слева и справа от него ситуация будет бесконечно повторяться.
2) Область определения: $D(f) = R/\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\}$ – все действительные числа, кроме $\ldots x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, … и т. д. или коротко: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, где k – любое целое число.
3) Область значений: $E(f) = R$.
4) Функция $y = tg\ x$ не ограничена.
5) Тангенс – функция нечетная, как и в случае с синусом, минус из-под тангенса не теряется, а выносится: $tg\ (-x) = -tg\ x$.

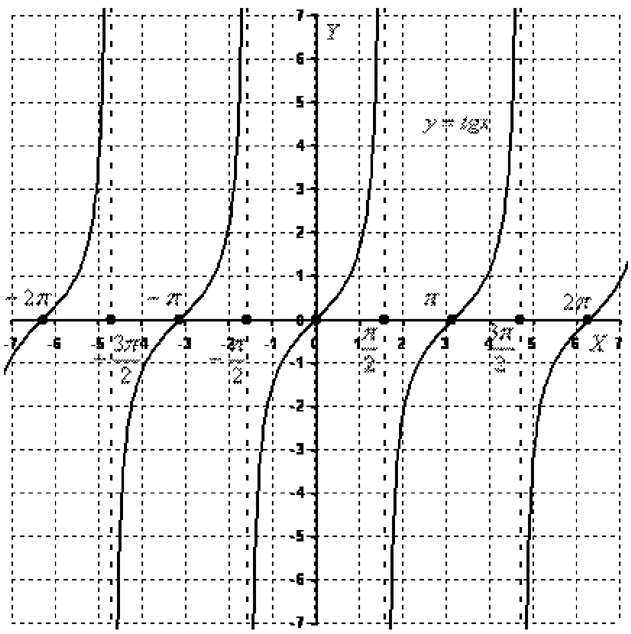


График котангенса – это почти тот же самый тангенс, функции связаны тригонометрическим соотношением $ctg\ x = \frac{1}{tgx}$.
Свойства практически такие же, как и у тангенса.
Вот его график:

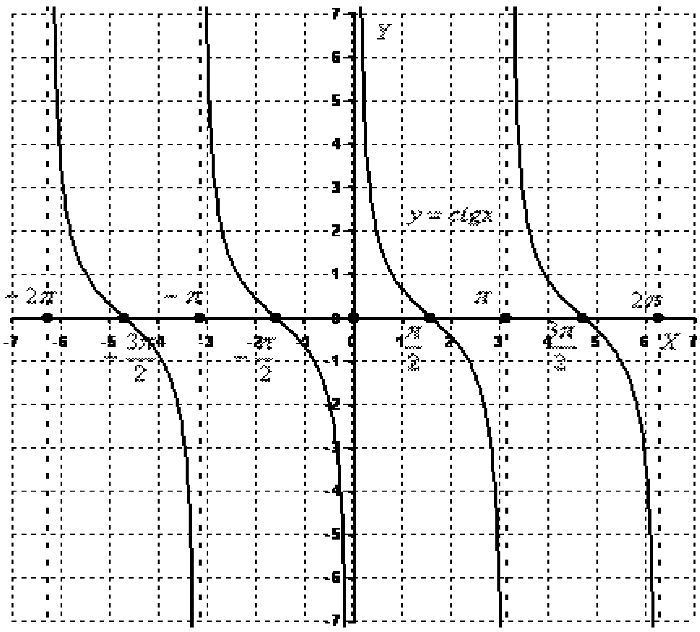


График арксинуса y=arccsin x.

Перечислим основные свойства функции $y = arccsin\ x$:

1) Область определения: $D(f) = [–1; 1]$ arcsin 2
2) Область значений: $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то есть, функция y= ограничена.
3) Арксинус – функция нечетная, здесь минус опять же выносится: $arccsin\ (–x) = – arccsin\ x$.

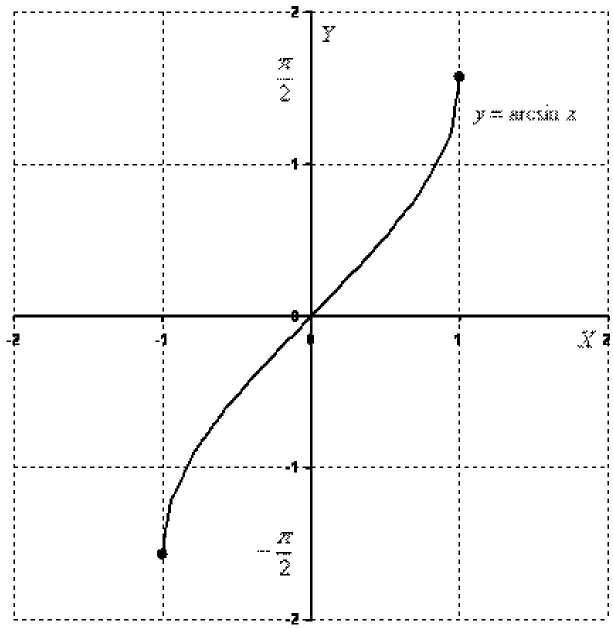
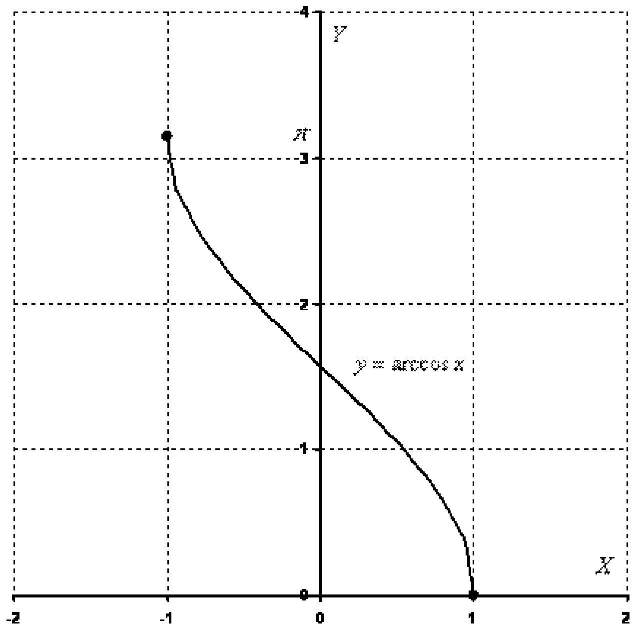


График арккосинуса y=arccos x.



Очень похоже на арксинус, свойства функции сформулируйте самостоятельно.

График арктангенса y=arctg x.

Основные свойства функции *y=arctg x*:

1) Область определения: $D(f) = R$
2) Область значений: $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то есть, функция *y=arctg x* ограничена.
3) У рассматриваемой функции есть две асимптоты: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.
4) Арктангенс – функция нечетная: $arctg\ (-x) = -\ arctg\ x$.

Вот его чертеж:

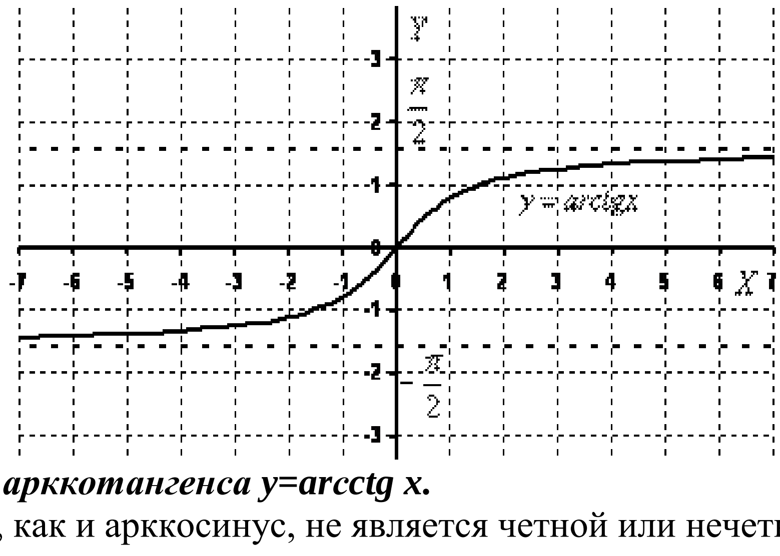
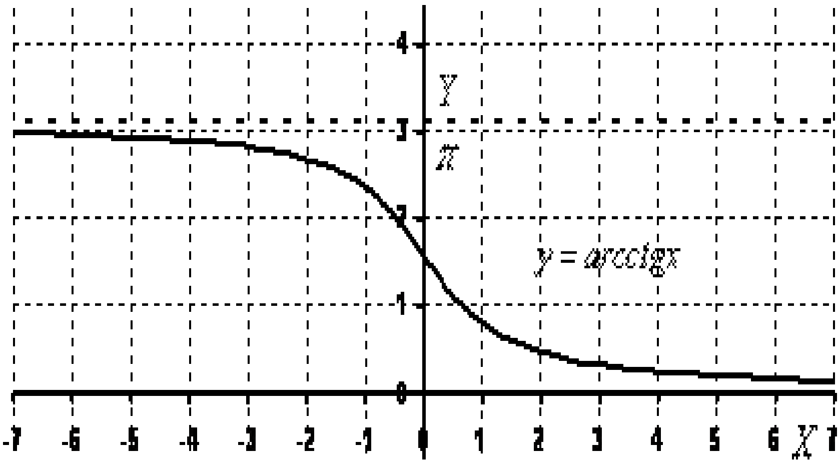


График арккотангенса y=arcctg x.

Арккотангенс, как и арккосинус, не является четной или нечетной функцией.



Самостоятельная работа

1. Постройте графики следующих функций $y = \frac{x}{x-1}$ и $y = \frac{1}{x} + x + 1$. Укажите область определения и множество значений; выясните, является ли функция ограниченной сверху (снизу).
2. Найдите множество значений функции $y = 3 - 2x$ на отрезке [–4;5].
3. В одной системе координат постройте графики функций, найдите их области определения и множества значений: $y = \begin{cases} x^3 - 1, x < -1 \\ 2, x = -1 \\ x^2, x > -1 \end{cases}$.
4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2x - 3$ на отрезке [–3;0].
5. Постройте график функции $y = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$.
6. Постройте графики с функции $y = 3^x - 2$.
7. Найдите координаты точки пересечения графиков функции $y = 2^x$ и $y = 8$.
8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^x$ на отрезке [–1; 2].
9. Постройте график функции $y = log_7|3 - x|$. Найдите её область определения и множество значений, указать промежутки монотонности.
10. Решите графически уравнение $log_2 x = -x + 1$.
11. Найдите область определения логарифмической функции $f(x) = log_2(x^2 - 5x - 6)$.
12. Постройте графики следующих функций $y = cos\ x$ и $y = sin\ x$ на отрезке $[-\pi; 2\pi]$. Для каждой из этих функций найти значения x из данного отрезка, при которых $y(x) = 1$, $y(x) = -1$, $y(x) = 0$, $y(x)>0$, $y(x)<0$.
13. Найдите область определения функции $y = tg\ 4x$.
14. Решить графически уравнение $cos\ x = |x|$.
15. Найти нули функции $y = cos^2x - cosx$

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение функции и приведите примеры функциональной зависимости.
2. Какие существуют способы задания функции? Перечислите преимущества и недостатки каждого.
3. Перечислите виды основных элементарных функций, запишите их математические выражения, изобразите их графически.

Практическое занятие по теме «Исследование функции. Построение и чтение графиков функций»

Цель: освоить метод линейного сплайна для построения графиков, содержащих модуль; научиться применять его в простых ситуациях.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Что такое сплайн?

Под сплайном (от англ. spline — планка, рейка) обычно понимают кусочно-заданную функцию.

Такие функции были известны математикам давно, начиная еще с Эйлера (*1707-1783г., швейцарский, немецкий и российский математик*), но их интенсивное изучение началось, фактически, только в середине XX века.

В 1946 году Исаак Шёнберг (*1903- 1990г., румынский и американский математик*) впервые употребил этот термин. С 1960 года с развитием вычислительной техники началось использование сплайнов в компьютерной графике и моделировании.

Графики функций широко используются в различных областях инженерных знаний, поэтому умение строить, «читать», прогнозировать их «поведение» имеют огромную роль в практической деятельности инженерных работников, метеорологов и людей других «математических» специальностей. Одно из основных назначений функций – описание реальных процессов, происходящих в природе. Но издавна ученые – философы и естествоиспытатели выделяли два типа протекания процессов: постепенное (*непрерывное*) и скачкообразное.

При падении тела на землю сначала происходит непрерывное нарастание скорости движения, а в момент столкновения с поверхностью земли скорость изменяется скачкообразно, становясь равной нулю или меняя направление (знак) при «отскоке» тела от земли (например, если тело – мяч).

Но раз есть разрывные процессы, то необходимы средства их описаний. С этой целью вводятся в действие функции, имеющие разрывы.

Один из способов введения таких разрывов <u>следующий:</u>

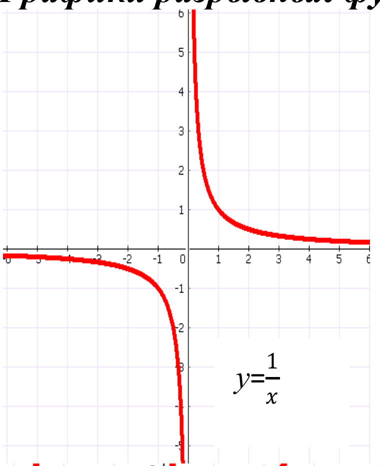
Пусть функция $y = f(x)$. При $x<a$ определена формулой $y = g(x)$, а при $x>a$ - формулой $y = h(x)$, причем будем считать, что каждая из функций $g(x)$ и $h(x)$ определена для всех значений x и разрывов не имеет. Тогда,

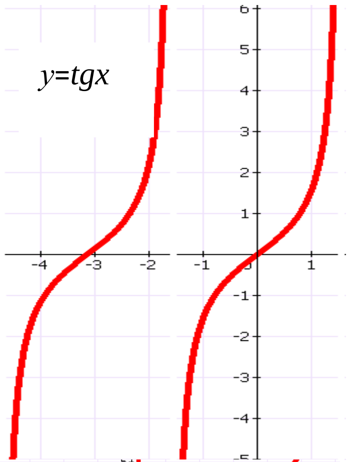
если $g(a) = h(a)$, то функция $f(x)$ имеет при $x=a$ скачок;

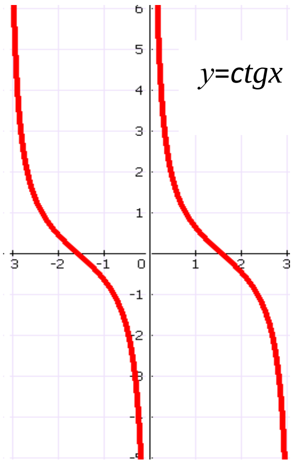
если же $g(a) = h(a) = f(a)$, то «комбинированная» функция f разрывов не имеет.

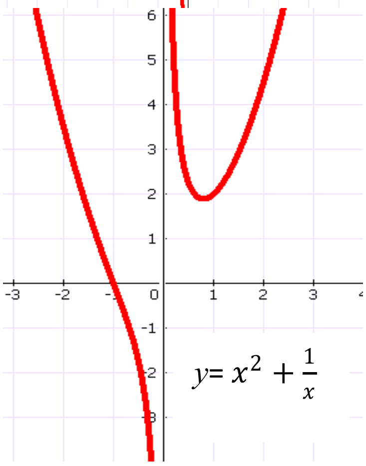
Если обе функции g и h элементарные, то f называется кусочно–элементарной.

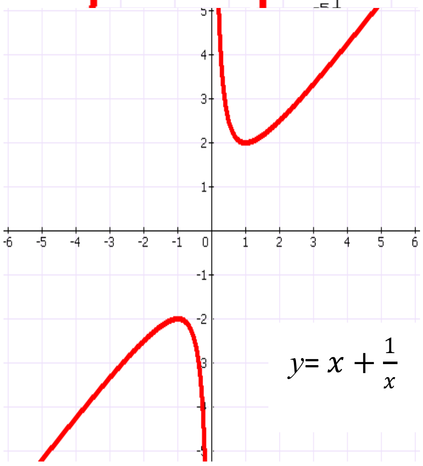
Графики разрывных функций



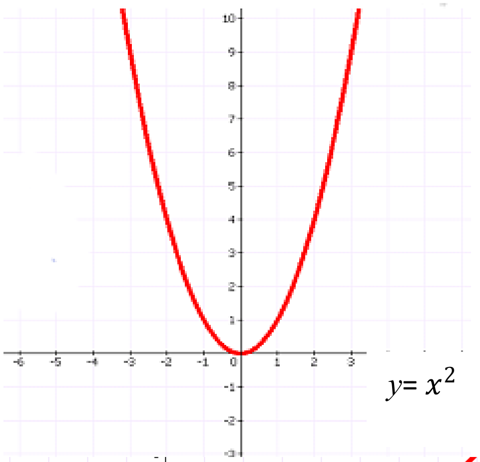


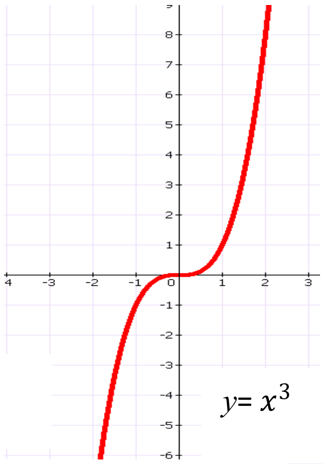


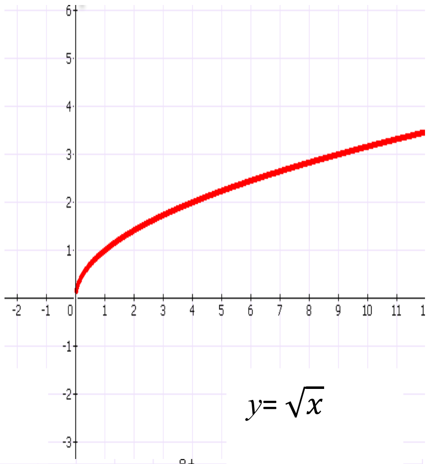


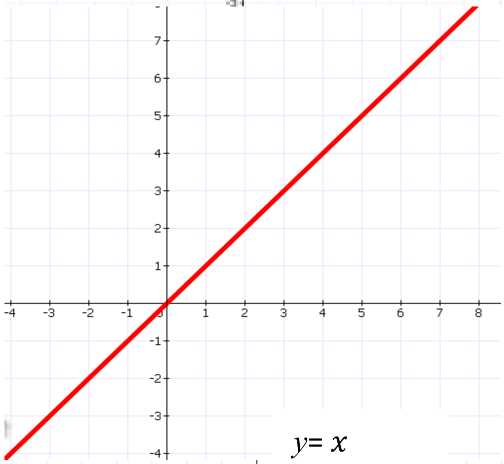


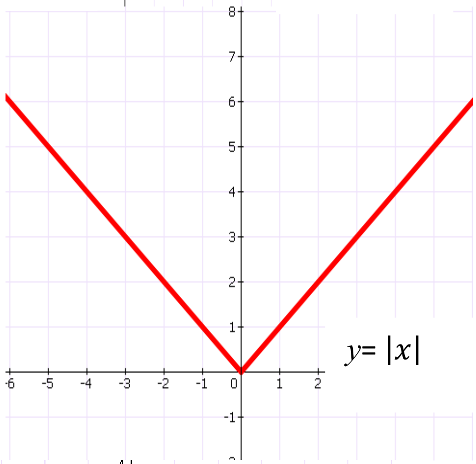
Графики непрерывных функций

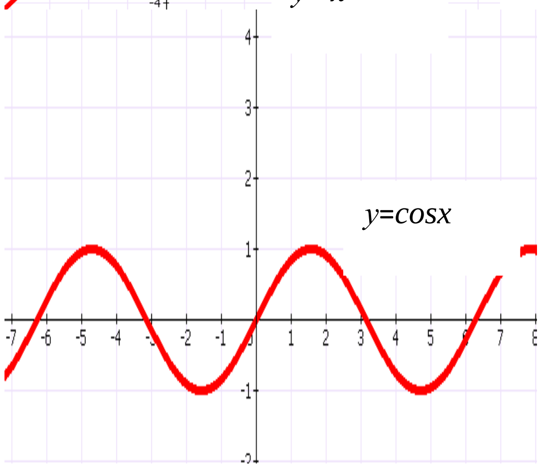


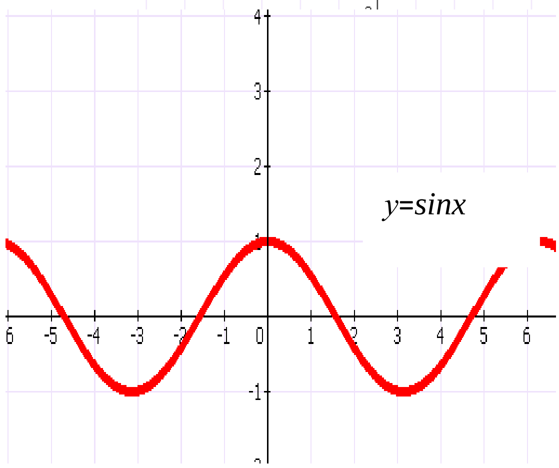










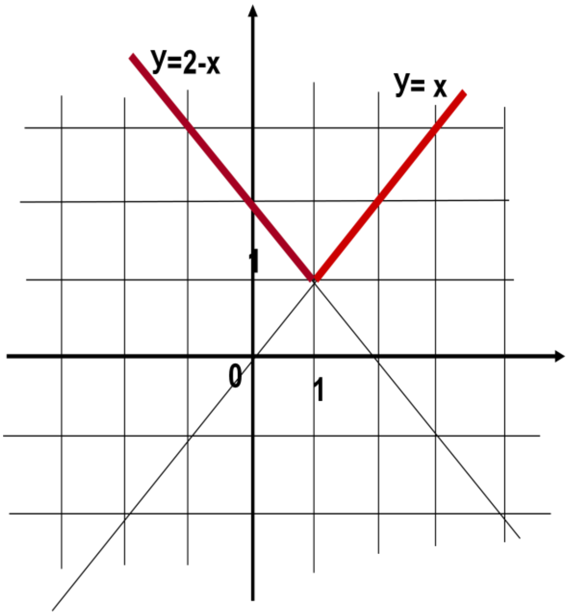


Пример 1. Построить график функции: *y*= $\begin{cases} 2 - x, \text{при } x < 1 \\ x, \text{при } x \geq 1 \end{cases}$

Решение:

$y = |x-1| + 1$

x=1 –точка смены формул



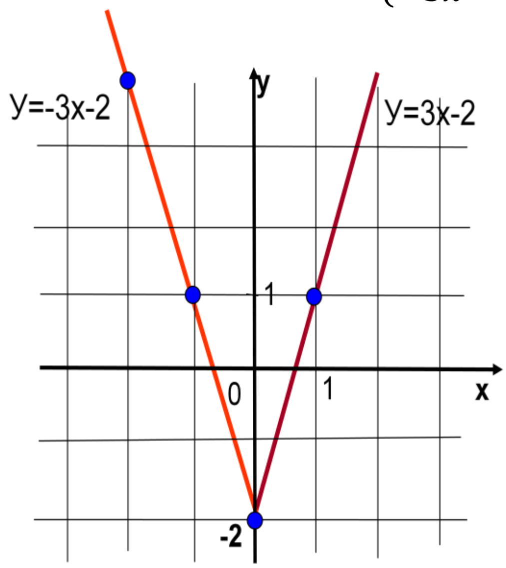
Определение модуля. Слово «модуль» произошло от латинского слова «modulus», что в переводе означает «мера».

Определение: Модулем числа a называется расстояние (*в единичных отрезках*) от начала координат до точки А (a). Это определение раскрывает геометрический смысл модуля.

Определение: Модулем (*абсолютной величиной*) действительного числа $\boldsymbol{a}$ называется то самое число $\boldsymbol{a} \geq 0$, и противоположное число $-\boldsymbol{a}$, если $a < 0$.

Пример 2. Построить график функции у = $3|x| - 2$.

Решение: По определению модуля, имеем: $y = \begin{cases} 3x - 2, \text{при } x \geq 0 \\ -3x - 2, \text{при } x < 0 \end{cases}$



Пусть заданы $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ – точки смены формул в кусочно-элементарных функциях.

Определение: Функция f, определенная при всех x, называется кусочно-линейной, если она линейна на каждом интервале $(-\infty;x_1)$, $(x_1;x_2)$,… $(x_{n-1};x_n)$, $(x_n;+\infty)$ и к тому же выполнены условия согласования, то есть в точках смены формул функция не терпит разрыв.

Определение: Непрерывная кусочно-линейная функция называется линейным сплайном. Её график есть ломаная с двумя бесконечными крайними звеньями – левым (отвечающим значениям $x < x_n$) и правым (отвечающим значениям $x > x_n$)

Кусочно-элементарная функция может быть определена более чем двумя формулами $y = \begin{cases} -1 \text{ при } x < 0 \\ 2x - 1 \text{ при } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ при } x > 1 \end{cases}$

График – ломаная с двумя бесконечными крайними звеньями – левым ($x<0$) и правым ($x>1$).

График кусочно-линейной функции удобно строить, указывая на координатной плоскости вершины ломаной. Кроме построения n вершин следует построить также две точки: одну левее вершины $A1$ (x_1; y (x_1)), другую – правее вершины An (x_n; y (x_n)).

Заметим, что разрывную кусочно-линейную функцию нельзя представить в виде линейной комбинации модулей двучленов.

Пример 3. Построить график функции $y = x + |x - 2| - |x|$.

Решение: Непрерывная кусочно-линейная функция называется линейным сплайном

1. Точки смены формул: $x - 2 = 0$, $x = 2$; $x = 0$

2. Составим таблицу:

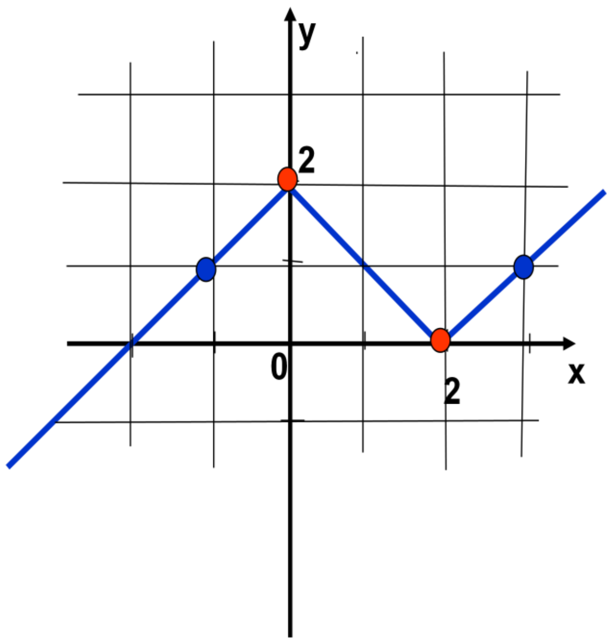
$y(0) = 0+|0-2|-|0|=0+2-0=2$;

$y(2)=2+|2-2|-|2|=2+0-2=0$;

$y(-1)= -1+|-1-2| - |-1|= -1+3-1=1$;

$y(3)=3+|3-2| - |3|=3+1-3=1$.

x	-1	0	2	3
y	1	2	0	1

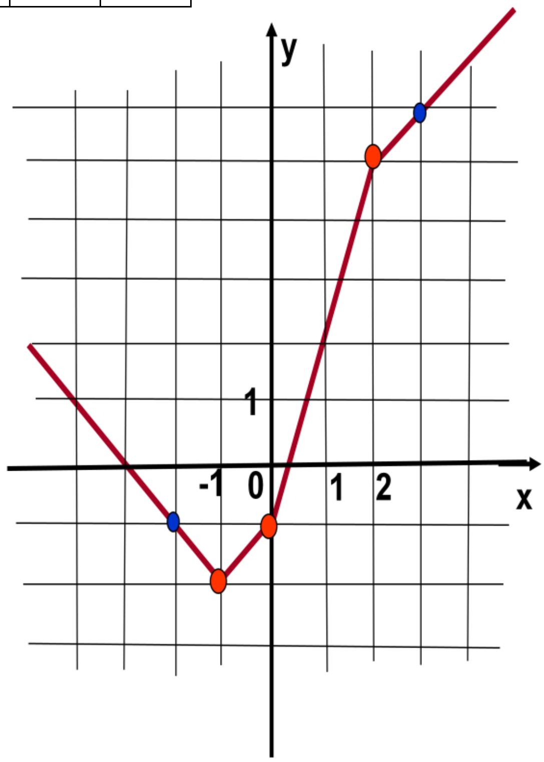


Пример 4. Построить график функции $y = |x+1| + |x| - |x - 2|$.

Решение:

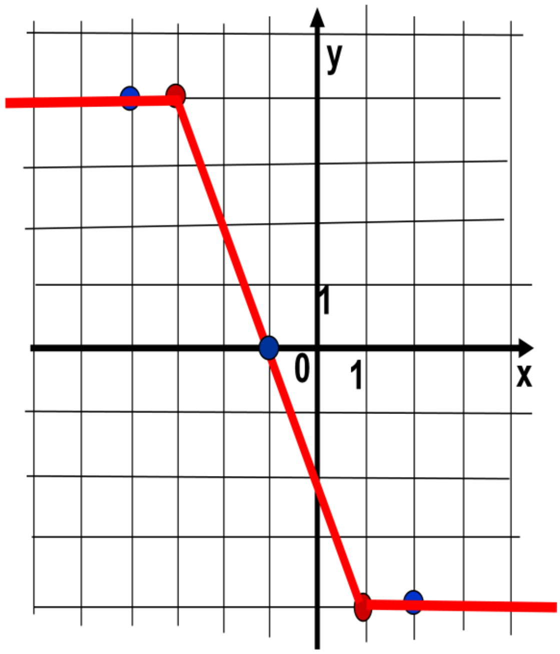
1.Точки смены формул:
$x+1=0$, $x=-1$;
$x=0$;
$x-2=0$, $x=2$.
Составим таблицу:
$y(-2)=|-2+1|+|-2|-|-2-2|=1+2-4=-1$;
$y(-1)=|-1+1|+|-1|-|-1-2|=0+1-3=-2$;
$y(0)=1+0-2=-1$;
$y(2)=|2+1|+|2|-|2-2|=3+2-0=5$;
$y(3)=|3+1|+|3|-|3-2|=4+3-1=6$.

x	–2	–1	0	2	3
y	–1	–2	–1	5	6



Пример 5. Построить график функции $y = |x-1| - |x+3|$
Решение: Построим график функции методом линейного сплайна
1. Точки смены формул:
$x-1 = 0$, $x = 1$; $x + 3 = 0$, $x = -3$.
2. Составим таблицу:
$y(-4) = |-4-1| - |-4+3| = |-5| - |-1| = 5-1=4$;
$y(-3) = |-3-1| - |-3+3| = |-4| = 4$;
$y(1)=|1-1| - |1+3| = -4$;
$y(2)=|2-1| - |2+3| = 1 - 5 = -4$.
$y(-1) = 0$.

x	–4	–3	1	2
y	4	4	–4	–4



Самостоятельная работа

1. Построить графики кусочно-линейных функций методом линейного сплайна:

а) $y = |x - 3| + |x|$;

б) $y = |2x - 4| + |x + 1|$

2. Постройте графики функций, установите закономерность:

а) $y = |x - 4|$ б) $y = |x| + 1$

$y = |x + 3|$ $y = |x| - 3$

$y = |x - 3|$ $y = |x| - 5$

$y = |x + 4|$ $y = |x| + 4$

3. Постройте график функции: $y = \begin{cases} 2x + 4, \text{если } x < -1 \\ 2\text{, если } -1 \le x < 2 \\ 3 - \frac{x}{2}, \text{ если } x \ge 2 \end{cases}$

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Что называется сплайном? Что такое модуль числа?
2) Дайте определение непрерывной функции. Какая функция называется сложной?
3) Дайте определение возрастающей и убывающей функции. Приведите примеры.

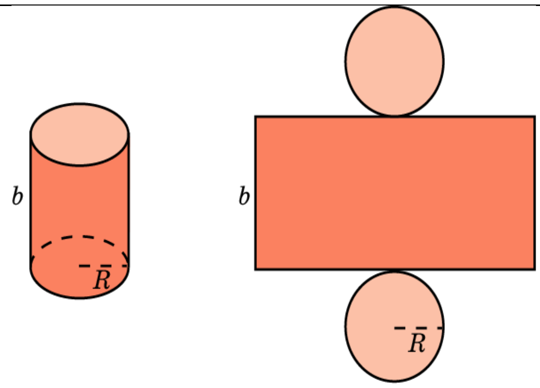
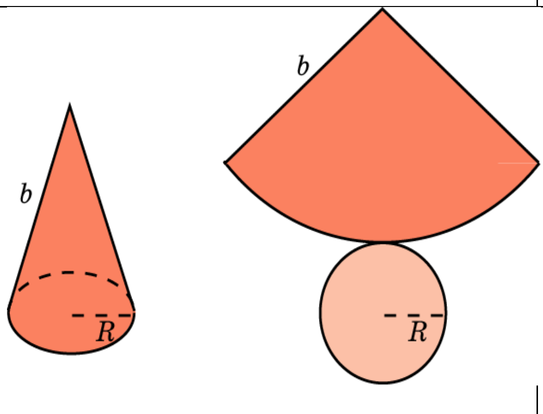
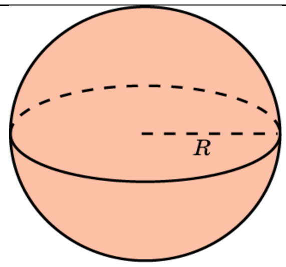
Практическое занятие по теме «Подобие тел. Площади поверхности и объем фигур вращения»

Цель: Знать формулы для вычисления площадей поверхности фигур вращения и уметь применять их при решении задач.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

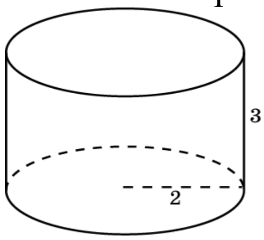
Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

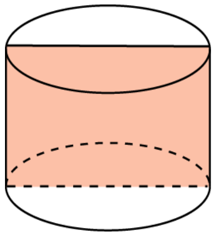
№п/п	Наименование фигуры	Изображение	Формула площадей полной и боковой поверхности
1	Цилиндр		$S_б = 2\pi RH$ $S_п = 2\pi RH + 2\pi R^2$ $S_о = \pi R^2$ $V = \pi R^2 \cdot H$
2	Конус		$S_б = \pi Rl$ $S_п = \pi Rl + \pi R^2$ $S_о = \pi R^2$ $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$
3	Сфера, шар		$S_п = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Самостоятельная работа
Вариант 1

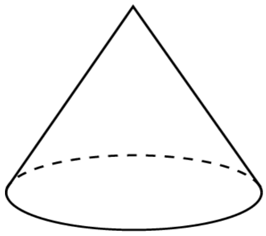
1. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота - 3 м. Найдите площадь боковой поверхности и объем цилиндра.



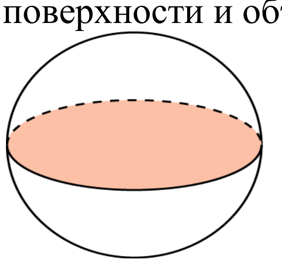
2. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4 $м^2$. Найдите площадь боковой поверхности и объем цилиндра.



3. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника вокруг его неравных сторон. Равны ли у этих цилиндров площади: а) боковых; б) полных поверхностей?; в)объемы?
4. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания.

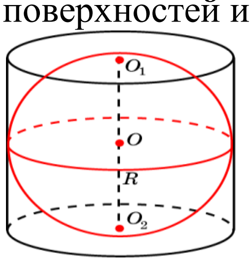


5. Площадь большого круга шара равна 3 $см^2$. Найдите площадь поверхности и объем шара.



6. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Найдите отношение их диаметров.

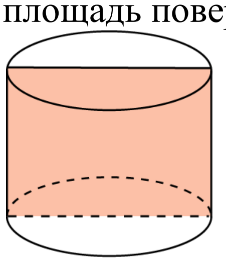
7. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение их площадей поверхностей и объемов.



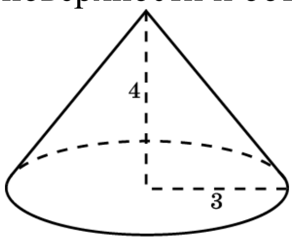
8. Прямоугольник вращается вокруг одной из сторон, равной 5см. Площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна 100π см^2. Найдите площадь прямоугольника.

Вариант 2

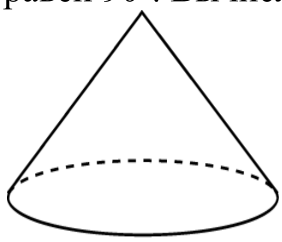
1. Осевое сечение цилиндра - квадрат. Площадь основания равна 1. Найдите площадь поверхности и объем цилиндра.



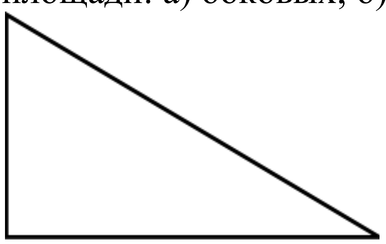
2. Радиус основания конуса равен 3 м, высота - 4 м. Найдите площадь поверхности и объем конуса.



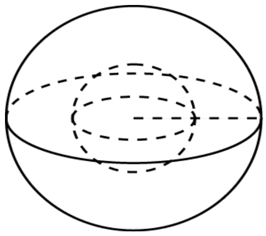
3. Образующая конуса равна 4 дм, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите площадь боковой поверхности и объем конуса.



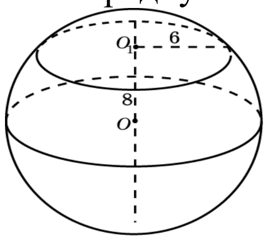
4. Два конуса образованы вращением одного и того же прямоугольного треугольника вокруг его неравных катетов. Равны ли у этих конусов площади: а) боковых; б) полных поверхностей? в)объемы?



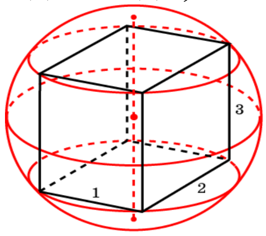
5. Как изменится площадь поверхности и объем шара, если увеличить радиус шара в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) n раз?



6. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите площадь поверхности и объем шара.



7. Около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 1 дм, 2 дм и 3 дм, описан шар. Найдите площадь его поверхности.



8. Прямоугольник, одна из сторон которого равна 5см, вращается вокруг неизвестной стороны. Площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна 60π см^2. Найдите площадь прямоугольника.

Требования к оформлению практической работы
Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Что такое многогранник; что такое грани, рёбра, вершины и диагональ многогранника?
2) Какие тела вращения вы знаете?
3) Сформулируйте основные свойства объёмов.

Практическое занятие по теме «Виды многогранников. Их изображения. Сечения, развёртки многогранников. Виды симметрии в пространстве»

Цель: рассмотреть сечения многогранников, симметрии и их развёртки.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Понятие правильного многогранника. Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многогранники и, кроме того, в каждой его вершине сходится одно и то же число рёбер. Примерами являются: куб, правильный тетраэдр, правильный октаэдр, правильный икосаэдр, правильный додекаэдр.

Правильный тетраэдр. Состоит из четырех равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 180^0

Правильный октаэдр. Состоит из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 240^0.

Правильный икосаэдр. Состоит из двадцати равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной пяти треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 300^0.

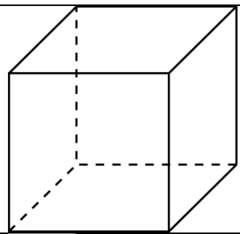
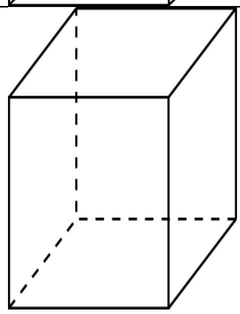
Куб. Составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трех квадратов. Сумма плоских углов равна 300^0.

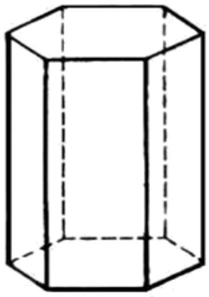
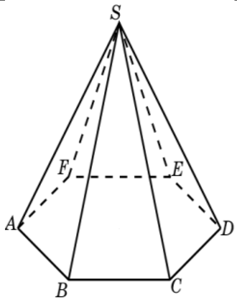
Правильный додекаэдр. Состоит из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трех правильных пятиугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 324^0.

Применение. Математика, в частности геометрия, представляет собой могущественный инструмент познания природы, создания техники и преобразования мира. Различные геометрические формы находят свое отражение практически во всех отраслях знаний: архитектура, искусство.

Площадью поверхности многогранника по определению считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

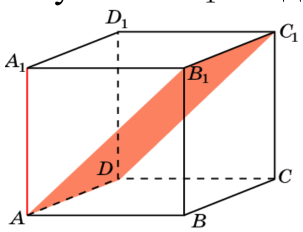
Основные формулы

№п/п	Наименование многогранника	Изображение	Площадь боковой и полной поверхности
1	Куб		$S_п = 6a^2$ $V=a^3$
2	Прямоугольный параллелепипед		$S_п = 2ab + 2ac + 2ac$ $V= abc$

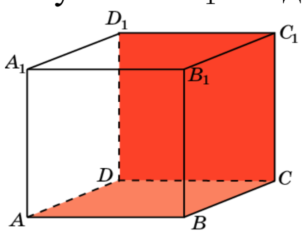
3	Призма		$S_б = p \cdot H$ $S_п = S_б + 2S_о$ $V = S_{осн}H$
4	Пирамида		$S_б = \frac{1}{2}p \cdot h$ $S_п = S_б + S_о$ $V = \frac{1}{3}S_{осн}H$

Самостоятельная работа
Вариант 1

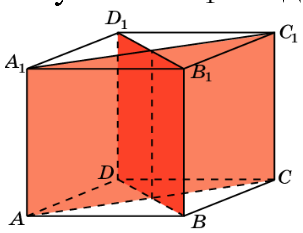
1. Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведен отрезок AK, равный 3. Из точки K опущены перпендикуляры на стороны BC и CD. Перпендикуляр из точки K к стороне BC равен 6. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.
2. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.



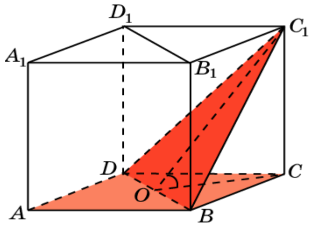
3. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDD_1.



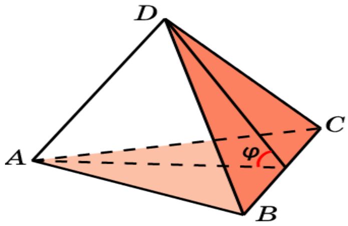
4. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и BDD_1.



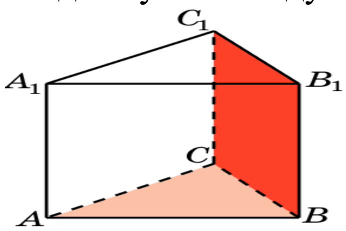
5. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BC_1D.



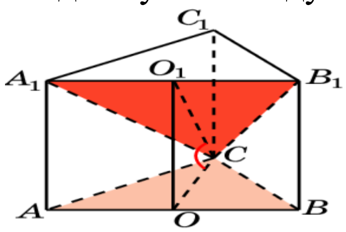
6. В тетраэдре $ABCD$, ребра которого равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCD.



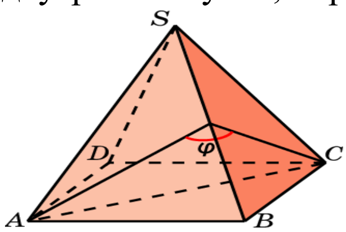
7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BB_1C_1.



8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и A_1B_1C.

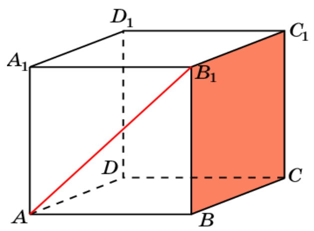


9. В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите двугранный угол, образованный гранями SAB и SBC.

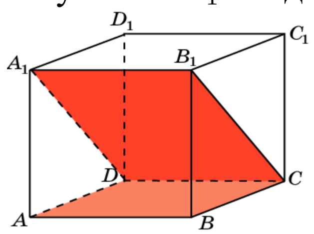


Вариант 2

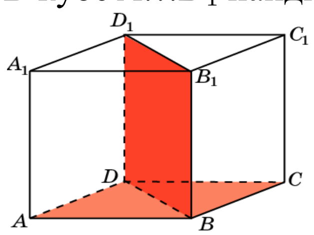
1. Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведен отрезок AK, равный 6. Из точки K опущены перпендикуляры на стороны BC и CD. Перпендикуляр из точки K к стороне BC равен 18. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.
2. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCC_1.



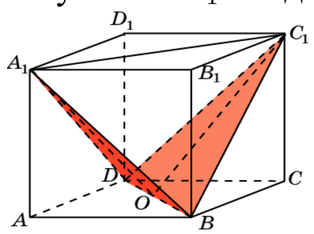
3. В кубе $A…D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDA_1.



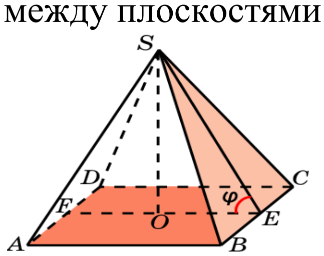
4. В кубе $A…D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BDD_1.



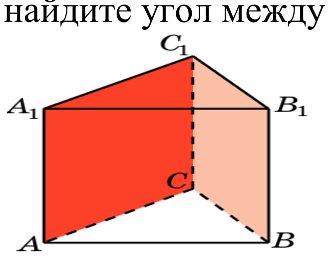
5. В кубе $A…D_1$ найдите угол между плоскостями BC_1D и BA_1D.



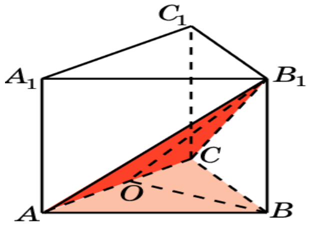
6. В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями SBC и ABC.



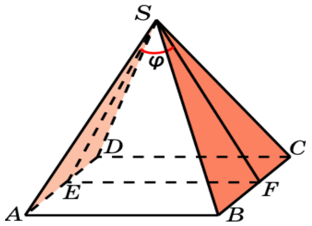
7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и BCC_1.



8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и ACB_1.



9. В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями SAD и SBC.



Требования к оформлению практической работы
Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Как вычисляются объёмы многогранников; тел вращения?
2) Какой формулой выражаются площади поверхности многогранников; тел вращения?
3) Что представляют собой развертки многогранников; тел вращения?

Практическое занятие по теме «Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел. Вычисление площадей и объемов»

Цель: Знать формулы вычисления площади боковой и полной поверхности призмы, пирамиды, параллелепипеда и уметь применять их к решению задач.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

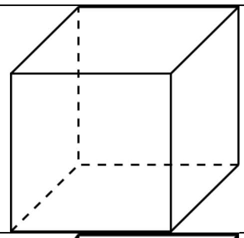
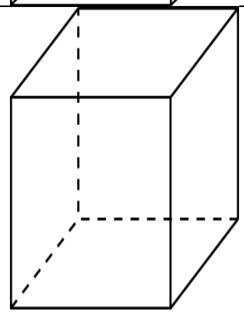
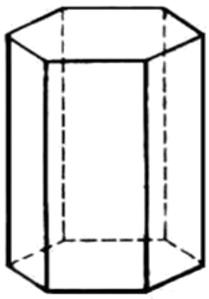
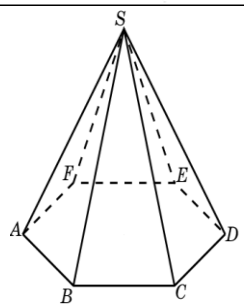
Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

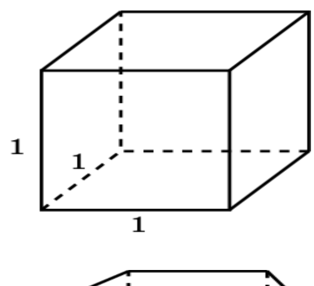
Площадью поверхности многогранника по определению считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

Основные формулы

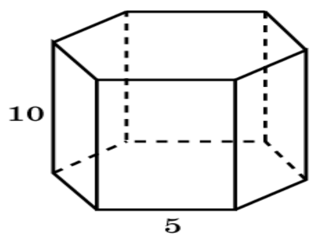
№п/п	Наименование многогранника	Изображение	Площадь боковой и полной поверхности

1	Куб		$S_п = 6a^2$
2	Прямоугольный параллелепипед		$S_п = 2ab + 2ac + 2ac$
3	Призма		$S_б = p \cdot H$ $S_п = S_б + 2S_o$
4	Пирамида		$S_б = \frac{1}{2} p \cdot h$ $S_п = S_б + S_o$

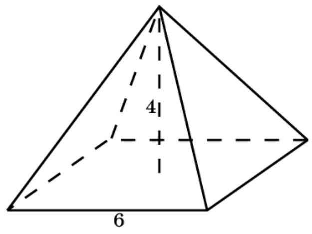
Самостоятельная работа
Вариант 1



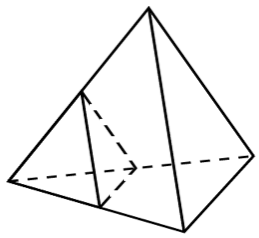
1. Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1?



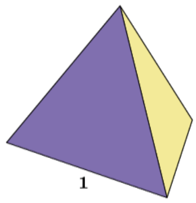
2. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а высота 10 см.



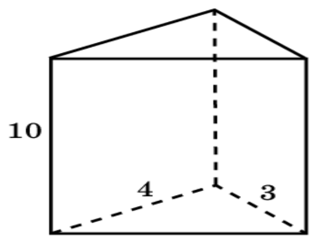
3. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см и высота 4 см.



4. Как изменятся площади боковой и полной поверхностей пирамиды, если все её рёбра: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз?

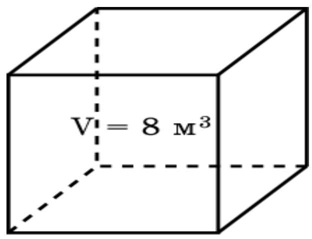


5. Чему равна площадь поверхности правильного тетраэдра с ребром 1?

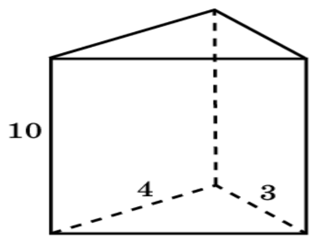


6. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы.

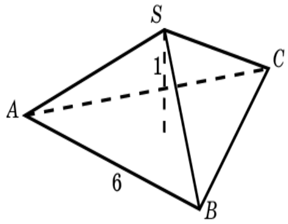
Вариант 2



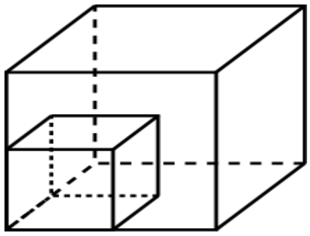
1. Объем куба равен 8 $м^3$. Найдите площадь его поверхности.



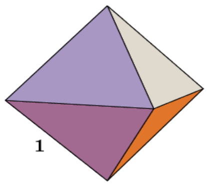
2. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы.



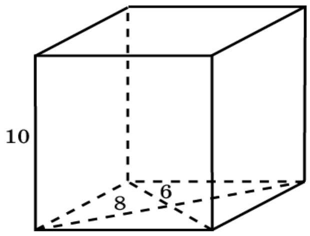
3. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной основания 6 см и высотой 1 см.



4. Как изменится площадь поверхности куба, если каждое его ребро увеличить в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) *n* раз?



5. Чему равна площадь поверхности октаэдра с ребром 1?



6. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см и боковым ребром 10 см

Требования к оформлению практической работы
Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:
1) Как вычисляются площади поверхности многогранников; тел вращения?
2) Какой формулой выражаются объёмы многогранников; тел вращения?
3) Что представляют собой развертки многогранников; тел вращения?

Практическое занятие по теме «Производные основных элементарных функций»

Цель: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций, обратных функций, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, понятием сложная и обратная функция.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Определение: Производной функции $f(x)$ ($f'(x_0)$) в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, при Δx, стремящемся к нулю.

Элементарные функции – это всё, что перечислено ниже. Производные этих функций надо знать наизусть. Тем более что заучить их совсем несложно – на то они и элементарные.

Основные элементарные функций

1. $C' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(kx+b)' = k$
5. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
6. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
7. $(log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}$
8. $(a^x)' = a^x lna$
9. $(e^x)' = e^x$
10. $(e^{kx+b})' = ke^{kx+b}$
11. $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$
12. $(sin\, x)' = cos\, x$
13. $(cos\, x)' = -sin\, x$
14. $(tg\, x)' = \frac{1}{cos^2 x}$
15. $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$
16. $(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
18. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
19. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Если элементарную функцию умножить на произвольную постоянную, то производная новой функции тоже легко считается: $(C \cdot f)' = C \cdot f'$.

В общем, константы можно выносить за знак производной. Например: $(2x^3)' = 2 \cdot (x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$.

Очевидно, элементарные функции можно складывать друг с другом, умножать, делить – и многое другое. Так появятся новые функции, уже не особо элементарные, но тоже дифференцируемые по определенным правилам.

Производная суммы и разности. Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$, производные которых нам известны. К примеру, можно взять элементарные функции, которые рассмотрены выше. Тогда можно найти производную суммы и разности этих функций:

$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}'$

$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' - \boldsymbol{g}'$

Итак, производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных. Слагаемых может быть больше. Например, $(f+g+h)' = f' + g' + h'$.

Пример 1. Найти производные функций: а) $f(x) = x^2 + sinx$; б) $g(x) = x^4 + 2x^2 - 3$.

Решение: Функция $f(x)$ - это сумма двух элементарных функций, поэтому:

а) $f'(x)=(x^2+sinx)' = (x^2)'+(sinx)' = 2x+cosx$;
Аналогично рассуждаем для функции $g(x)$. Только там уже три слагаемых (с точки зрения алгебры):
б) $g'(x)= (x^4+2x^2-3)'= (x^4+2x^2-3)'= (x^4)'+(2x^2)'-3'= 4x^3+4x+0=4x\cdot(x^2+1)$.
Ответ: $f\,'(x)=2x+cosx$; $g'(x)=4x\cdot(x^2+1)$.

Производная произведения. Производная произведения считается совсем по другой формуле. А именно: $\boldsymbol{(f\cdot g)'=f'\cdot g+g'\cdot f}$. Формула несложная, но её часто забывают. Результат - неправильно решенные задачи.

Пример 2. Найти производные функций: а) $f(x)=x^3\cdot cosx$; б) $g(x)=(x^2+7x-7)\cdot e^x$.

Решение: Функция $f(x)$ представляет собой произведение двух элементарных функций, поэтому все просто:
а) $f'(x)=(x^3\cdot cosx)'= (x^3)'\cdot cosx+x^3\cdot(cosx)'= 3x^2\cdot cosx+x^3\cdot(-sinx)= x^2\cdot(3cosx-x\cdot sinx)$
У функции $g(x)$ первый множитель чуть посложней, но общая схема от этого не меняется. Очевидно, первый множитель функции $g(x)$ представляет собой многочлен, и его производная - это производная суммы. Имеем:
б)$g'(x)=((x^2+7x-7)\cdot e^x)'=(x^2+7x-7)'\cdot e^x+(x^2+7x-7)\cdot(e^x)'=(2x+7)\cdot e^x+(x^2+7x-7)\cdot e^x=$
$=e^x\cdot(2x+7+x^2+7x-7)= (x^2+9x)\cdot e^x= x(x+9)\cdot e^x$.
Ответ: $f'(x)=x^2\cdot(3cosx-x\cdot sinx)$; $g'(x)=x(x+9)\cdot e^x$.

Обратите внимание, что на последнем шаге производная раскладывается на множители. Формально этого делать не нужно, однако большинство производных вычисляются не сами по себе, а чтобы исследовать функцию. А значит, дальше производная будет приравниваться к нулю, будут выясняться ее знаки и так далее. Для такого дела лучше иметь выражение, разложенное на множители.

Пример 3. Найти производную данной функции $y = ln\,x \cdot cos\,x$.

Решение: Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования:
$y\,' = (ln\,x)\,'\,cos\,x + ln\,x\,(cos\,x)\,' = \frac{1}{x}\cdot cos\,x - ln\,x \cdot sin\,x$.
Ответ: $\frac{1}{x}\cdot cos\,x - ln\,x \cdot sin\,x$.

Производная частного. Если есть две функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $g(x)\neq 0$ на интересующем нас множестве, можно определить новую функцию $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Для такой функции тоже можно найти производную: $\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}}$.

Пример 4. Найти производные функций: $f(x) = \frac{sinx}{x}$; $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$

Решение: В числителе и знаменателе каждой дроби стоят элементарные функции, поэтому все, что нам нужно - это формула производной частного:
$f'(x) = \left(\frac{sinx}{x}\right)' = \frac{(sinx)'\cdot x-(x)'\cdot sinx}{x^2} = \frac{x\cdot cosx - sinx}{x^2}$
$g'(x) = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{(x^2)'\cdot e^x-(e^x)'\cdot x^2}{(e^x)^2} = \frac{2x\cdot e^x - e^x\cdot x^2}{(e^x)^2} = \frac{e^x\cdot x\cdot(2-x)}{(e^x)^2} = \frac{x\cdot(2-x)}{e^x}$
Ответ: $f'(x) = \frac{x\cdot cosx - sinx}{x^2}$; $g'(x) = \frac{x\cdot(2-x)}{e^x}$

Пример 5. Найти производную данной функции $y = \frac{x^3}{\cos x}$.

Решение: Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования:

$y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{cos^2 x} = \frac{x^2 (3\cos x + x \sin x)}{cos^2 x}$.

Ответ: $\frac{x^2 (3\cos x + x \sin x)}{cos^2 x}$.

Пример 6. Найти значение производной функции $y = sin\,(4x - \frac{\pi}{6})$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$

Решение: Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции:

$y' = (sin\,(4x - \frac{\pi}{6}))' = (4x - \frac{\pi}{6})' \cdot cos(4x - \frac{\pi}{6}) = 4\,cos(4x - \frac{\pi}{6})$

$y'\,(\frac{\pi}{12}) = 4\,cos(4 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}) = 4\,cos\,\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$

Пример 7. $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$. Найти значение производной функции при $y'(-1)$.

Решение: Найдем производную данной функции: $y' = 3x^2 - 6x + 5$. Следовательно, $y'(-1) = 14$.

Ответ: 14.

Правило дифференцирования сложной функции. Сложная функция – это функция от функции. Говоря о сложной функции, имеют в виду, что такая функция составлена из нескольких функций. Например, функция $y=sin3x$ состоит из $3x = u$ и $y = sin\,u$, где u – промежуточная функция. Чтобы найти производную сложной функции пользуются правилом цепочки – это когда производная сложной функции равна произведению производных от всех составляющих её функции. При этом следует помнить, что каждую функцию нужно дифференцировать по её собственному аргументу: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Сложные функций

1) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
2) $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3) $(log_a\,u)' = \frac{1}{u \cdot lna} \cdot u'$
4) $(a^u)' = a^u\,lna \cdot u'$
5) $(e^u)' = e^u \cdot u'$
6) $(ln\,u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
7) $(sin\,u)' = cos\,u \cdot u'$
8) $(cos\,u)' = -\,sin\,u \cdot u'$
9) $(tg\,u)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$
10) $(ctg\,u)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$
11) $(arcsin\,u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12) $(arccos\,u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13) $(arctg\,u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
14) $(arcctg\,u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример 8. Найти производные сложной функции

а) $y = (x^2+3x)^5$.

Решение: $y' = ((x^2+3x)^5)' = [u = x^2+3x;\ y = u^5]$; $y' = (u^5)' = 5\,u^4$; $u' = (x^2+3x)' = 2x+3$; $y' = 5\,(x^2+3x)^4 \cdot (2x+3)$.

б) $y = sin\,2x$.

Решение: $y' = (sin\,2x)' = [u = 2x;\ y = sin\,u]$; $y' = (sin\,u)' = cosu \cdot (2x)' = cos2x \cdot 2 = 2cos2x$.

в) $y = ln\,x^2$.

Решение: $y' = (\ln x^2)' = [u = x^2;\ y = \ln u];\ \ y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot (x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$.

г) $y = \cos x^4$.

Решение: $y' = (\cos x^4)' = [u = x^4;\ y = \cos u] = -\sin u \cdot (x^4)' = -\sin x^4 \cdot 4x^3 =$
$= -4x^3 \cdot \sin x^4$

д) $y = tg\, x^5$.

Решение: $y' = (tg\, x^5)' = [u = x^5;\ y = tg\, u] = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot (x^5)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{\cos^2 x^5}$.

е) $y = \arcsin x^3$.

Решение: $y' = (\arcsin x^3)' = [u = x^3;\ y = \arcsin u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot (x^3)' =$
$= \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.

ж) $y = \log_6 7x$.

Решение: $y' = (\log_6 7x)' = [u = 7x;\ y = \log_6 u] = \frac{1}{u \ln 6} \cdot (7x)' = \frac{1}{7x \ln 6} \cdot 7 = \frac{7}{7x \ln 6} = \frac{1}{x \ln 6}$.

з) $y = \log_7 x^8$.

Решение: $y' = (\log_7 x^8)' = [u = x^8;\ y = \log_7 u] = \frac{1}{u \ln 7} \cdot (x^8)' = \frac{1}{x^8 \ln 7} \cdot 8x^7 =$
$= \frac{8x^7}{x^8 \ln 7} = \frac{1}{x \ln 7}$.

Самостоятельная работа

1) Найдите производные функций:

$y = x^4 + 3x$	$y = -3x^2 - 13x$	$y = \frac{x^3}{2-5x}$
$y = 3x^2 - 5x + 6$	$y = \sqrt{x} - 9x^3$	$y = \frac{2-2x^2}{x^2}$
$y = \sqrt{x} + \frac{10}{x}$	$y = 2x^2 - \frac{5}{x}$	$y = \frac{1-8x}{4x+2}$
$y = 6\sqrt{x} + 1$	$y = x^7 - 4x^{15} - 3x^2 + 5$	$y = x^2 \cdot (3x^2 + 2)$
$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$	$y = -2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$	$y = \frac{2x-2}{5-4x}$
$y = (x + 4x^7) \cdot x^3$	$y = x^6 \cdot (8x - 16)$	$y = \frac{2+7x^2}{x^3}$
$y = x^3 \cdot (2x + 1)$	$y = (2x^5 - 6x) \cdot x^3$	$y = \frac{2x^3 - 1}{x}$
$y = (9 - x^2)^4$	$y = \sqrt{x^3 + 1}$	$y = \sin 5x$
$y = \log_2 3x$	$y = \log_7 x^5$	$y = 2^{\sin x} - 2^{2x}$
$y = \sin (x^3 - 3x^2)$.	$y = \cos x^4$.	$y = \arccos 3x$.
$y = \arcsin x^2$.	$y = arctg\, 2x$.	$y = arcctg\, x^3$.

2) Найдите значения производных функций $f'(2)$; $g'(1)$; $h'(0)$, если
$f(x)=x^2+3x^3-4$; $g(x)=\dfrac{x-2}{2+x}$; $h(x)=(3x+2)\cdot x^2$.
3) Найдите значения производных функций $f'(2)$; $g'(1)$; $h'(0)$, если
$f(x)=-x^3+12x^2-x+121$; $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; $h(x)=x\cdot(x^3+9)$.

Требования к оформлению практической работы
Расчетные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:
1) Дайте определение производной функции.
2) Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования.
3) Каков геометрический смысл производной?

Практическое занятие по теме «Исследование функции с применением производной»

Цель: Проверить на практике знание понятия производной функции, понимание геометрического смысла производной, умение применять их для решения задач, умение находить производные функций, умение находить промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы, промежутки выпуклости, точки перегиба, асимптоты функции, применять полученные знания при построении графика функции и исследовании функции по общей схеме.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

При построении графиков функций с помощью производных полезно придерживаться такого плана:
1°. Находят область определения функции и определяют точки разрыва, если они имеются.
2°. Выясняют, не является ли функция четной или нечетной; проверяют ее на периодичность.
3°. Определяют точки пересечения графика функции с координатными осями, если это возможно.
4°. Находят критические точки функции.
5°. Определяют промежутки монотонности и экстремумы функции.
6°. Определяют промежутки вогнутости и выпуклости кривой и находят точки перегиба.

7°. Используя результаты исследования, соединяют полученные точки плавной кривой. Иногда для большей точности графика находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.

Этот план исследования функции и построения ее графика является примерным, его не всегда надо придерживаться пунктуально: можно менять порядок пунктов, некоторые совсем опускать, если они не подходят к данной функции. В частности, если нахождение точек пересечения с осями координат связано с большими трудностями, то это можно не делать; если выражение для второй производной окажется очень сложным, то можно ограничиться построением графика на основании результатов исследования первой производной; если функция - четная, то ее график симметричен относительно оси Oy, поэтому достаточно построить график для положительных значений аргумента, принадлежащих области определения функции, и т. п.

Пример 1. Исследовать функции и построить их графики: $f(x) = x^2+2x-3$.

Решение:

1°. Функция определена на интервале $(-\infty; \infty)$. Точек разрыва нет.

2°. Имеем $f(-x)=(-x)^2+2(-x)-3=x^2-2x-3$. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

3°. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Если $y=0$, то $x^2+2x-3=0$. Решая квадратное уравнение найдем корни: $x_1 = -3$, $x_2= 1$. Значит, кривая пересекает ось абсцисс в точках $(-3;0)$ и $(1;0)$. Если $x=0$, то из равенства $y = x^2+2x-3$ следует $y = -3$, т. е. кривая пересекает ось ординат в точке $(0; -3)$.

4°. Найдем критические точки функции. Имеем

$y'=2x+2$; $2x+2=0$; $2(x+1)=0$; $x=-1$.

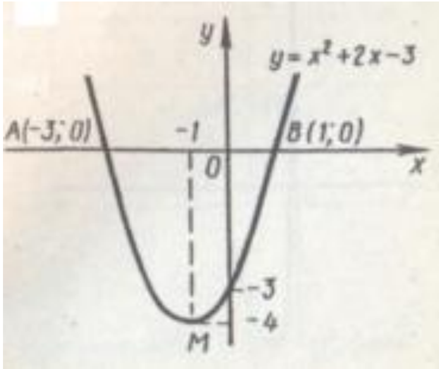
5°. Область определения функции разделится на промежутки $(-\infty,-1)$ и $(-1, \infty)$. Знаки производной $f'(x)$ в каждом промежутке можно найти непосредственной подстановкой точки из рассматриваемого промежутка. Так, $f'(-2)= -2<0$, $f'(2) = 2>0$. Следовательно, в промежутке $(-\infty,-1)$ функция убывает, а в промежутке $(-1,\infty)$- возрастает. При $x=-1$ функция имеет минимум, равный $f(-1)=f_{min}=(-1)^2+2(-1)-3=1-2-3 = -4$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	–	**0**	+
f	$\searrow$	$f_{min} = -4$	$\nearrow$

6°. Находим $f''(x) = 2$, т.е. $f''(x)>0$. Следовательно, кривая вогнута на всей области определения и не имеет точек перегиба.

7°. Построим все найденные точки в прямоугольной системе координат и соединим их плавной линией.



Пример 2. $y=x^3-12x+4$.

Решение:

1°. Функция определена на интервале $(-\infty;\infty)$. Функция непрерывна во всей области определения.

2°. Имеем $f(-x)=(-x)^3+12(-x)+4=-x^3-12x+4$. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

3°. Если $x=0$, то $y=4$, т. е. график функции пересекает ось ординат в точке (0, 4).

4°. Имеем $y'=0$, $y'=3x^2-12$, $3x^2-12=0$, $3(x+2)(x-2)=0$; $x_1=-2$, x_2–**2** – критические точки функции.

5°. Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Её область определения разделится на промежутки $(-\infty;-2)$, $(-2;2)$, $(2;\infty)$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	$y_{max}=20$	$\searrow$	$y_{min}=-12$	$\nearrow$

6°. Находим $y''=(3x^2-12)'=6x$; $6x=0$; $x=0$. Определим знаки второй производной слева и справа от точки $x=0$: $y''_{x=-1}=-6<0$; $y''_{x=1}=6>0$. Следовательно, в промежутке $(-\infty,0)$ кривая выпукла, а в промежутке $(0,\infty)$ – вогнута. При $x=0$ имеем точку перегиба; ее ордината $y=0-12\cdot 0+4=4$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;\infty)$
y''	–	**0**	+
y	**Выпукла**	**Точка перегиба (0; 4)**	**Вогнута**

7°. Кривая изображена на рисунке.

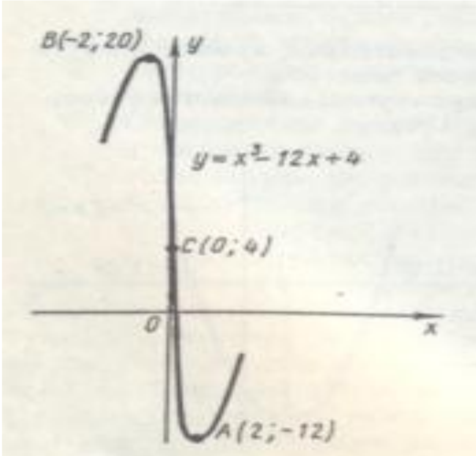


Рис. 130

Пример 3. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$.

Решение:

1°. Область определения функции - интервал $(-\infty,\infty)$. Точек разрыва нет.

2°. Здесь $f(-x) = f(x)$, так как x входит только в чётных степенях. Следовательно, функция четная и ее график симметричен относительно оси Oy.

3°. Чтобы определить точки пересечения графика с осью ординат, полагаем $x = 0$, тогда $y = 0$. Значит, кривая пересекает ось Oy в точке (0; 0).

Чтобы определить точки пересечения графика с осью абсцисс, полагаем $y = 0$: $\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 = 0$; $x^4 - 6x^2 = 0$; $x^2(x^2 - 6) = 0$. **Отсюда** $x^2 = 0$, $x_{1,2} = 0$, т. **е. две точки** пересечения слились в одну точку касания; кривая в точке (0; 0) касается оси Ox. Далее, **имеем** $x^2 - 6 = 0$, т.е. $x_{3,4} = \sqrt{6} \approx \pm 2{,}45$.

Итак, в начале координат O (0; 0) кривая пересекает ось Oy и касается оси Ox, а в точках A (–2,45; 0) и B (2,45; 0) пересекает ось Ox.

4°. Найдем критические точки функции:

$y' = x^3 - 3x$; $x^3 - 3x = 0$; $x(x^2 - 3) = 0$; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}7$. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$.

5°. Исследуем критические точки с помощью второй производной.

Находим $y'' = 3x^2 - 3$. При $x = 0$ получим $y''_{x=0} = -3$, т.е. $y_{max} = 0$, и, значит, O(0; 0) - точка максимума. Далее при $x = \sqrt{3}$ имеем $y''_{x=\sqrt{3}} = 6$, т.е.

$y_{min} = \frac{1}{4}(\sqrt{3})^4 - \frac{3}{2}(\sqrt{3})^2 = -2{,}25$. Таким образом, $D(\sqrt{3}; -2{,}25)$ - точка минимума, а вследствие симметрии минимум достигается также в точке $C(-\sqrt{3}; -2{,}25)$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	**0**	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; \infty)$
y'	–	0	+	0	–	0	+
y	$\searrow$	$y_{min} = -2{,}25$	$\nearrow$	$y_{max} = 0$	$\searrow$	$y_{min} = -2{,}25$	$\nearrow$

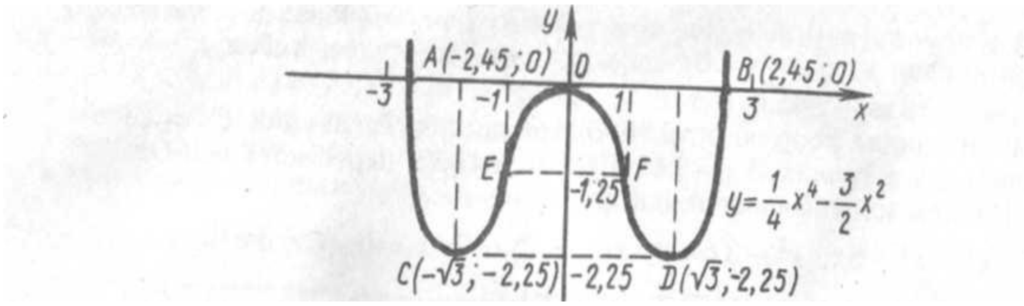
6°. Имеем $y'' = 3(x^2 - 1) = 0$, $3(x-1)(x+1) = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$.

Точки $x = -1$ и $x = 1$ разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, \infty)$. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ имеем $y'' > 0$, т.е. здесь кривая вогнута, а в интервале (-1, 1) имеем $y'' < 0$, т. е. здесь она выпукла. При $x = -\mathbf{1}$ и $x = 1$ получаем точки перегиба E и F, ординаты которых одинаковы: $y(-1) = y(1) = -1{,}25$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1;\ 1)$	1	$(1;\ \infty)$
y''	+	0	-	0	+
y	**Вогнута**	**Точка перегиба $(-1;\ -1{,}25)$**	**Выпукла**	**Точка перегиба $(1;\ 1{,}25)$**	**Вогнута**

7°. График изображен на рисунке.



Самостоятельная работа Исследовать функцию и построить график

$y = x^3 - 3x^2 + 4$

$y = x^4 - 2x^2 + 3$

$y = 4x^2 - x^4 - 3$

$y = \frac{4x^3 - x^4}{5}$

$f(x) = 3 - 3x + x^3$

$f(x) = x^3 - 3x.$

$y = 8 - 2x - x^2$

$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$

$f(x) = 1 - 2{,}5\,x^2 - x^5$

$f(x) = 2x^3 - 6x$

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Дайте определение функции и приведите примеры функциональной зависимости.
2) Что называется областью определения и областью значения функции?
3) Какие существуют способы задания функции? Дайте определение возрастающей и убывающей функции. Приведите примеры

Практическое занятие по теме «Вычисление площади криволинейной трапеции»

Цель: развитие умений и навыков по вычислению площади фигур.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Определение: Фигуру, ограниченную графиком функции, отрезком $[a;b]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ называют *криволинейной трапецией*.

Для вычисления площади криволинейной трапеции применяется следующая теорема:

Теорема: Если f – непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a;b]$ функция, а F – её первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a;b]$, т.е. $S = F(b) - F(a)$.

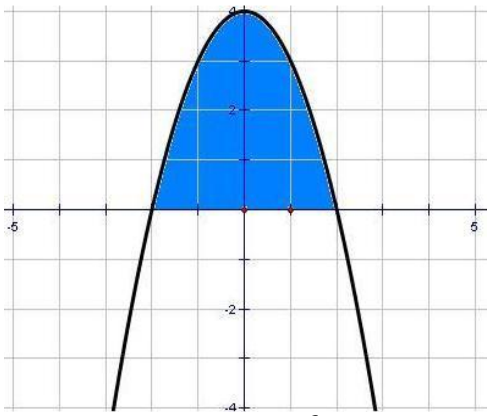
Чтобы вычислить площадь криволинейной трапеции, нужно:

1) Начертить график функции;
2) Для функции $f(x)$ найти одну из первообразных $F(x)$;
3) Вычислить значения первообразных $F(a)$ и $F(b)$ на концах отрезка $[a;b]$;
4) Найти разность $F(b) - F(a)$, равную площади криволинейной трапеции;
5) Записать ответ в *кв.ед*.

Пример 1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y=0$

Решение:

1. $y = 4 - x^2$- квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз, вершина (0;4) $y = 0$ - ось абсцисс. Найдём точки пересечения параболы с осью x: $x^2 - 4 = 0; x^2 = 4, \quad x = 2, \ x = -2.$



2. Найдем первообразную функции $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$.

3. Найдем значения первообразной на концах отрезка, т.е.

$F(a) = F(-2) = 4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3} = -\frac{16}{3}$;

$F(в) = F(2) = 4\cdot 2 - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$;

4. Найдем $S = F(в) - F(a) = \frac{16}{3} - (-\frac{16}{3}) = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$ (*кв.ед*)

Ответ: $10\frac{2}{3}$ *кв.ед*

Пример 2. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f(x) = x^2 + 5x + 6$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью абсцисс.

Решение:

1. Графиком заданной функции является парабола, ветви которой направлены вверх, т.к $a>0$.

Найдем вершину параболы:

$A(x_0;y_0)$: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$; $y_0 = (-2{,}5)^2 + 5(-2{,}5) + 6 = -0{,}25$;

$y(0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 6 = 6.$

Построим график функции и проведём прямые $x = -1$, $x = 2$.

2. Найдем первообразную функции $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x$.

3. Найдем значения первообразной на концах отрезка, т.е.

$F(a) = F(-1) = \frac{(-1)^3}{3} + \frac{5(-1)^2}{2} + 6 \cdot (-1) = -\frac{23}{6}$;

$F(в) = F(2) = \frac{2^3}{3} + \frac{5 \cdot 2^2}{2} + 6 \cdot 2 = \frac{112}{6}$

4. Найдем $S = F(в) - F(a) = \frac{112}{6} - (-\frac{23}{3}) = \frac{135}{6} = 22{,}5$ (*кв.ед*)

Ответ: 22,5 *кв.ед*

Самостоятельная работа Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $f(x) = x^2 - 6x + 8$, прямыми $x = -2$, $x = -1$ и осью абсцисс.
2. $f(x) = x^2 - 6x + 9$, прямой $x = 2$.
3. $f(x) = x^2 + 8x + 16$, прямой $x = -2$.
4. $f(x) = x^2 - 6x + 10$, прямыми $x = -1$, $x = 3$ и осью абсцисс.
5. $f(x) = x^2 - 4x + 6$, прямыми $x = 1$, $x = 3$ и осью абсцисс.
6. $f(x) = x^2 + 2x - 3$, прямыми $x = 0$, $x = -2$ и осью абсцисс.
7. $f(x) = x^2 + 8x + 16$, прямыми $x = 1$, $x = -2$.
8. $f(x) = x^2 - 6x + 10$, прямыми $x = 1$, $x = 3$ и осью абсцисс.
9. $f(x) = x^2 - 6x + 9$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью абсцисс.

Требования к оформлению практической работы

Расчетные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

1) Какая фигура называется криволинейной трапецией.
2) Как вычислить площадь криволинейной трапеции?
3) Напишите формулу Ньютона-Лейбница.

Практическое занятие по теме «Уравнения. Система уравнений»

Цель: рассмотреть виды систем уравнений, научиться решать системы уравнений.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Решение уравнения – это процесс, состоящий в основном в замене заданного уравнения другим уравнением, ему равносильным. Такая замена называется тождественным преобразованием.

Основные тождественные преобразования:

- Замена одного выражения другим, тождественно равным ему. Например, уравнение $(3x+2)^2 = 15x+10$ можно заменить следующим равносильным: $9x^2+12x+4 = 15x+10$
- Перенос членов уравнения из одной стороны в другую с обратными знаками. Так, в предыдущем уравнении мы можем перенести все его члены из правой части в левую со знаком « – »: $9x^2+12x+4–15x–10 = 0$, после чего получим: $9x^2–3x –6 = 0$.
- Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение (число), отличное от нуля. Это очень важно, так как новое уравнение может не быть равносильным предыдущему, если выражение, на которое мы умножаем или делим, может быть равно нулю. Уравнение $x–1= 0$ имеет единственный корень $x = 1$. Умножив обе его части на х–3, мы получим уравнение $(x–1)(x–3) = 0$, у которого два корня: $x = 1$ и $x = 3$. Последнее значение не является корнем заданного уравнения $x–1 = 0$. Это так называемый посторонний корень. И наоборот, деление может привести к потере корня. Так, если $(x–1)(x–3) = 0$ является исходным уравнением, то корень $x = 3$ будет потерян при делении обеих частей уравнения на $x–3$.
- Можно возвести обе части уравнения в нечетную степень или извлечь из обеих частей уравнения корень нечетной степени. Необходимо помнить, что: а) возведение в четную степень может привести к приобретению посторонних корней;

б) неправильное извлечение корня четной степени может привести к потере корней. Уравнение $7x = 35$ имеет единственный корень $x = 5$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим уравнение: $49x^2 = 1225$, имеющее два корня: $x = 5$ и $x = –5$. Последнее значение является посторонним корнем. Неправильное извлечение квадратного корня из обеих частей уравнения $49x^2= 1225$ даёт в результате $7x = 35$, и мы теряем корень $x = –5$. Правильное извлечение квадратного корня приводит к уравнению: $|7x| = 35$, а следовательно, к двум случаям: 1) $7x = 35$, тогда $x =5$; 2) $–7x=35$, тогда $x= –5$. Следовательно, при правильном извлечении квадратного корня мы не теряем корней уравнения.

- ***ОДЗ (областью допустимых значений)*** уравнения называется множество тех значений неизвестной, при которых определены его правая и левая части. Очевидно, что вне ОДЗ решений не существует, однако не все числа, входящие в ОДЗ, служат решениями уравнения. Уравнение можно решить и не находя ОДЗ. С другой стороны, верно найденное ОДЗ и последующий отбор корней с его помощью не может гарантировать отсутствие ошибок.

Способы решения:

1) *Способ подстановки*

- Выразить из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую.
- Подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение.
- Решить получившееся уравнение с одной переменной.
- Найти соответствующее значение второй переменной.

Пример 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2y - 5x = 3 \end{cases}$

Решение:

1. Выразим из первого уравнения y через x: $y=7 – 3x$.

2. Подставив во второе уравнение вместо y выражение $7 - 3x$, получим систему: $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2(7 - 3x) - 5x = 3 \end{cases}$

3. В системе (2) второе уравнение содержит только одну переменную. Решим это уравнение:

$14–6x–5x = 3$,

$–11x= –11$,

$x=1$.

4. Подставим в равенство $y=7–3x$ вместо x число 1, найдём соответствующее значение y: $y=7–3$ 1, $y=4$.

Ответ: (1;4).

2) *Способ сложения*

- Умножьте почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами.
- Сложите почленно левые и правые части уравнений системы.
- Решите получившееся уравнение с одной переменной.
- Найдите соответствующее значение второй переменной.

Пример 2. Решить систему: $\begin{cases} 5x + 11y = 8 \\ 10x - 7y = 74 \end{cases}$

Решение:

1. Умножим все члены первого уравнения на –2, а второе уравнение оставим без изменений, то коэффициенты при в полученных уравнениях будут противоположными числами: $\begin{cases} -10x + 11y = 8 \\ 10x - 7y = 74 \end{cases}$

2. Почленно сложим и получим уравнение с одной переменной: $–29y=58$.

3. Из этого уравнения находим, что $y=58/(–29)= –2$.

4. Подставив во второе уравнение вместо y число –2,

Найдём значение x:

$10x–7·(–2)=74$,

$10x = 60$,

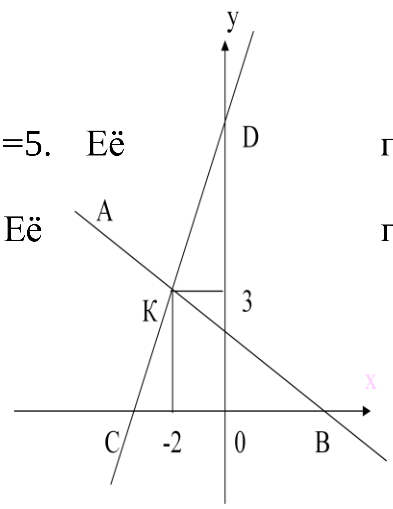
$x = 6$.

Ответ: (6; –2)

3) *Графический способ*

- Построить график функции, заданной первым уравнением системы.
- Построить график функции, заданной вторым уравнением системы.
- Определить координаты точек пересечения графиков функций.

Пример 3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$



Решение:

1. Построим график линейной функции $2x+3y=5$. Её графиком является прямая **AB**.

2. Построим график линейной функции $3x–y = –9$. Её графиком является прямая **CD**.

3. Графики пересекаются в точке **K(–2;3).**

Значит, система имеет единственное решение:

$x = -2$, $y=3$
Ответ $(-2; 3)$

4) *Способ замены*

Пример 4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28 \end{cases}$

Решение:
Сделаем замену: $\sqrt[3]{x} = a$, $\sqrt[3]{y} = b$
Получим систему: $\begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 + b^3 = 28 \end{cases}$
Разложим левую часть второго уравнения на множители по ФСУ:
$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ - и подставим в него из первого уравнения $(a+b)=4$. Тогда получим систему, равносильную второй: $\begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 - ab + b^2 = 7 \end{cases}$
Подставляя во второе уравнение значение $b=4-a$, найденное из первого
приходим к уравнению $a^2-a(4-a)+(4-a)^2=7$, т.е. $a^2-4a+3=0$.
Полученное квадратное уравнение имеет два корня: $a_1 = 3 =$ и $a_2 = 1$.
Соответствующие значения b таковы: $b_1 = 1$ и $b_2 = 3$.
Переходим к переменным x и y. Получаем: $\sqrt[3]{x} = a_1$, т.е. $x_1 = 1^3 = 1$, $y_1 = 3^3 = 27$, $x_2 = 3^3 = 27$, $y_1 = 1^3 = 1$.
Ответ:(1;27), (27;1).

Системы показательных уравнений

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 3^{2x-y} = 3 \end{cases}$

Решение:
Из второго уравнения системы находим $2x-y=1$, откуда $y=2x-1$.
Подставляя вместо y в первое уравнение выражение $2x-1$
получим $2^x + 2^{2x-1} = 12$.
Обозначим $2^x = t$, получим квадратное уравнение $t^2+2t-24=0$.
Находим корни этого уравнения: $t_1 = -6$ и $t_2 = 4$.
Уравнение замены $2^x = -6$ решений не имеет.
Корнем уравнения $2^x = 4$ является число $x=2$.
Соответствующее значение $y=3$.
Ответ:(2;3).

Системы логарифмических уравнений

Пример 6. Решить систему уравнений: $\begin{cases} lg(y-x) = lg2 \\ log_2 x - 4 = log_2 3 - log_2 y \end{cases}$

Решение:
Первое уравнение системы равносильно уравнению $y - x = 2$, а второе – уравнению $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$, причём $x>0$ и $y>0$. Подставляя $y=x+2$ в уравнение $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$, получим $x(x+2)=48$, откуда $x^2+2x-48=0$,т.е. $x=-8$ или $x=6$.
Но так как $x>0$, то $x=6$ и тогда $y=8$.
Итак, данная система уравнений имеет одно решение: $x=6$, $y=8$.
Ответ: (6;8).

Самостоятельная работа Решить системы уравнений:

1. Методом подстановки

1) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5y + 8(x - 3y) = 7x - 12 \\ 9x + 3(x - 9y) = 11y + 4 \end{cases}$

2. Методом сложения

1) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ 7x - 4y = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4(2x - y + 3) - 3(x - 2y) = 57 \\ 3(3x - 4y + 3) + 4(4x - 2y) = 84 \end{cases}$

3. Графическим методом

1) $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4y + 3x = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -2(x - y) + 16 = 3(y + 7) \\ 6x - (x - 5) = -8 - (y + 1) \end{cases}$

4. Способ замены

1) $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \\ x - y = 12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{6 + x} - 3\sqrt{3y + 4} = -10 \\ 4\sqrt{3y + 4} - 5\sqrt{6 + x} = 6 \end{cases}$

5. Системы показательных уравнений

1) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 16 \\ x + y = 9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ 6^{x+y} = 216 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{x+2y} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$

6. Системы логарифмических уравнений

1) $\begin{cases} x + y = 34 \\ log_2 x + log_2 y = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} log_4(x + y) = 2 \\ log_3 x + log_3 y = 2 + log_3 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} log_4(x + y) = 2 \\ log_3 x + log_3 y = 2 + log_3 7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} lg(y^2 + x^2) = 1 + lg13 \\ l\,g(x + y) = lg(x - y) + lg8 \end{cases}$

Требования к оформлению практической работы
Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:
1. Что значит решить уравнение?
2. Что значит решить систему уравнений?
3. Перечислите способы решения систем уравнений.

Практическое занятие по теме «Неравенства. Система неравенств»

Цель: развитие умений и навыков по вычислению случайных событий вероятности и навыками решения задач на вычисление частоты событий.

Оснащение: методические указания для проведения практических занятий (карточки – задания).

Методические указания по выполнению работы: изучить краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия; изучить условие задания практического занятия; при выполнении работы соблюдать последовательность действий, ответить на контрольные вопросы; оформить отчет по практической работе.

Основной теоретический материал

Неравенством называется запись, в которой функции соединены знаком (или несколькими знаками) отношения «>», «<», «≤», «≥».

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если нужно найти все такие значения переменной, каждое из которых является частным решением всех заданных неравенств.

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют ***частным решением системы неравенств***.

Множество всех частных решений системы неравенств представляет собой общее решение системы неравенств.

Решить систему неравенств - значит найти все её частные решения. Решение системы неравенств представляет собой пересечение решений неравенств, образующих систему.

Системой неравенств называют два или более неравенства, которые объединены фигурной скобкой

Неравенства $f(x)>g(x)$, $f(x)<g(x)$, называются строгими, а неравенства $f(x)\leq g(x)$, $f(x)\geq g(x)$ нестрогими.

Решением неравенства, называется всякое значение переменой, при котором данное неравенство верно. Например, решением неравенства $f(x)> g(x)$ является всякое значение переменной $x = a$, при котором справедливо неравенство $f(a) > g(a)$, или функция $f(x)$ при $x=a$ принимает большее значение чем функция $g(x)$.

Запись нескольких неравенств под знаком фигурной скобки называется системой (число и вид неравенств, входящих в систему, может быть произвольным).

Решение системы неравенств есть пересечение решений всех входящих в нее неравенств. Двойное неравенство $f(x) < g(x) < h(x)$ можно записать в виде системы:

Запись нескольких неравенств, объединенных квадратной скобкой, называется совокупностью данных неравенств. Решение совокупности есть объединение решений входящих в нее неравенств.

Виды неравенств

- *Линейные*: $kx>b$, $k\neq0$

$x>\frac{b}{k}$, если $k>0$

$x<\frac{b}{k}$, если $k<0$

- *Квадратные*: $ax^2+bx+c=0$ ($a>0$, $a<0$)
- *Содержащие чётную степень*: $x^{2n}>b$

$x<-\sqrt[2n]{b}$, $x>\sqrt[2n]{b}$, если $b>0$

$x<0$, $x>0$, если $b=0$

$x\in$R, если $b<0$

- *Содержащие нечётную степень*: $x^{2n+1}>b$

$x>\sqrt[2n+1]{b}$

- *Иррациональные (корень чётной степени)*: $\sqrt[2n]{x}>b$

$x>b^{2n}$, если $b>0$

$x>0$, если $b=0$

$x\geq0$, если $b<0$

- *Иррациональные (корень нечётной степени)*: $\sqrt[2n+1]{x}>b$

$x>b^{2n+1}$

- *Показательные*:

$a^x>b$, если $a>1$	$a^x>b$, если $0<a<1$
$x>\log_a b$, если $b>0$	$x<\log_a b$, если $b>0$
$x\in$R, если $b<0$	$x\in$R, если $b<0$

- *Логарифмические*:

$\log_a x>b$, если $a>1$	$\log_a x>b$, если $0<a<1$
$x>a^b$	$0<x<a^b$ 1

- *Тригонометрические*: Решаем неравенства, используя тригонометрическую окружность, либо с помощью графика соответствующей функции.

Сформулируем несколько часто используемых при отыскании решений свойств неравенств, все они уже знакомы Вам.

1. К обеим частям неравенства можно прибавить одну и туже функцию определенную в ОДЗ данного неравенства. Если $f(x)>g(x)$ и $h(x)$ - любая функция определенная в ОДЗ данного неравенства, то $f(x)+h(x)>g(x)+h(x)$
2. Если обе части неравенства умножить на положительную функцию, определенную в ОДЗ данного неравенства (или на положительное число), то получим неравенство, равносильное исходному неравенству: если $f(x)>g(x)$ и $h(x)>0$, то $f(x)h(x)>g(x)h(x)$
3. Если обе части неравенства умножить на отрицательную функцию, определенную в ОДЗ данного неравенства (или на отрицательное число) и знак

неравенства изменить на противоположный, то полученное неравенство эквивалентно данному неравенству: если $f(x)>g(x)$ и $h(x)<0$, то $f(x)h(x)<g(x)h(x)$

4. Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать. Если $f(x)> g(x)$ и $m(x) > h(x)$, то $f(x)+ m(x) > g(x) + h(x)$.
5. Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать если $f(x)> g(x)$ и $h(x) < m(x)$, то $f(x)- h(x) < g(x) - m(x)$.
6. Неравенства одного смысла с положительными частями можно почленно умножать. Если $f(x)> g(x) > 0$ и $m(x) > h(x) > 0$, то $f(x)\, g(x)>m(x)\, h(x)$.
7. Неравенства, образованные неотрицательными функциями, можно почленно возводить в положительную степень: если $f(x) > g(x) > 0$ и $m > 0$, то $(f(x))^m> (g(x))^m$.

Иногда, решая неравенство, приходится переходить к неравенству - следствию, т.е. выполнять неравносильное преобразование (как правило, связанные с расширением ОДЗ): заменить функцию $f(x)$ - $f(x)$ нулем, сократить неравенство $f(x)g(x) > f(x)h(x)$ на общий положительный множитель $f(x)$ и т.п. Решения, найденные в результате этих действий, могут оказаться посторонними. Перед записью ответа их следует «отсечь» посторонние решения.

Метод интервалов. Метод интервалов часто используют при решения неравенств. Он позволяет свести решение неравенства $f(x)> 0$ (<, <, >) к решению уравнения $f(x)= 0$.

Метод заключается в следующем:

1. Находится ОДЗ неравенства.
2. Неравенство приводится к виду $f(x)> 0$(<, <, >) (т.е. правая часть переносится влево) и упрощается.
3. Решается уравнение $f(x)= 0$.
4. Метод интервалов часто используют при решения неравенств. Он позволяет свести решение неравенства $f(x)> 0$ ($\geq$, <, $\leq$) к решению уравнения $f(x) = 0$. Метод заключается в следующем: интервалы состоят из неокрашенных точек, если неравенство строгое, и закрашенных, если оно нестрогое.
5. Все точки, отмеченные на ОДЗ и ограничивающие его, разбивают это множество на так называемые интервалы знакопостоянства. На каждом таком интервале определяется знак функции $f(x)$.
6. Ответ записывается в виде объединения отдельных множеств, на которых $f(x)$ имеет соответствующий знак. Точки, отмеченные закрашенными кружками, в ответ входят, отмеченные пустыми - нет. Точки ОДЗ, являющиеся граничными, включаются (или не включаются) в ответ после дополнительной проверки.

Метод интервалов основан на том, что непрерывная функция $f(x)$ может изменить знак либо в граничных точках ОДЗ, где она «разрывается», либо проходя через ноль, т.е. в точках, являющиеся корнях уравнения $f(x) = 0$. Ни в каких других точках перемены знака не происходит.

Полезно запомнить следующее: Если функция представляет собой произведение нескольких не повторяющихся множителей, имеющих вид $(ax+b)$, где $a > 0$, то знаки функции на промежутках справа на лево чередуются с «плюса» на «минус». Если какой-то множитель повторяется четное число раз, то при переходе через эту точку смены знака не происходит.

Метод замены множителей. Самым легким способом решения неравенств является способ решения рациональных неравенств методом интервалов, но не все неравенства имеют структуру, которая позволяет решать их этим методом. Поэтому цель сегодняшнего урока – изучить методы решения сложных неравенств (неравенства, содержащие логарифмические, показательные, иррациональные выражения и выражения с модулями) путем замены множителей. Идея этого метода заключается в том, что неравенства повышенной сложности сводятся к решению рациональных неравенств. Оказывается, достаточно широкий класс неравенств подобную попытку допускает. Как было сказано выше, решение неравенства – это объединение конечного числа непересекающихся промежутков. Их легко задать одним рациональным неравенством, что во многих ситуациях позволяет быстрее двигаться к ответу, а иногда получать более эффективные схемы решения типовых неравенств.

Вспоминаем определения возрастающей и убывающей функций.

Функция $y = f(\mathrm{t})$называется возрастающей (убывающей) на множестве М, если для любых $\mathrm{t}_1 > \mathrm{t}_2$ из множества М выполняется условие: $f(\mathrm{t}_1) > f(\mathrm{t}_2)$ $(f(\mathrm{t}_1) < f(\mathrm{t}_2))$.

Определения возрастающей и убывающей функций можно сформулировать по-другому. Функция $y = f(\mathrm{t})$называется возрастающей (убывающей) на множестве М, если для любых $\mathrm{t}_1; \mathrm{t}_2$ из множества М выражения $\mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2$ и $f(\mathrm{t}_1) - f(\mathrm{t}_2)$ имеют одинаковый (противоположный) знак.

Этот факт можно использовать при решении неравенств, в правой части которых стоит ноль. Можно в левой части (числителе и/или знаменателе левой части) заменить разность значений монотонной функции разностью значений аргумента. При этом, если функция возрастающая, то знак неравенства сохранится, а если функция убывающая, то знак неравенства поменяется на противоположный. Такой прием решения неравенств и называется ***методом замены множителей.***

Замена множителей с показательными и логарифмическими выражениями. Можно установить, что разность степеней по одному и тому же основанию всегда по знаку совпадает с произведением разности показателей этих степеней на отклонение основания степени от единицы. Другими словами, выражение вида (a^f – a^g) имеет тот же знак, что и выражение (f – g)(a – 1) при a> 0 (если a = 1, то выражения равны нулю). Сказанное равносильно тому, что разность логарифмов по одному и тому же основанию всегда по знаку совпадает с произведением разности чисел этих логарифмов на отклонение от единицы. Другими словами выражение вида (log_af – log_ag) имеет тот же знак (в области существования логарифмов) что и выражение
(f – g)(a – 1).

В частности, легко получить следующие полезные схемы неравенств:

1) $a^f > a^g \leftrightarrow \begin{cases}(f - \mathrm{g})(a - 1) \\ a > 0\end{cases}$
2) $\begin{cases}a^f > b \\ b > 0\end{cases} \leftrightarrow (f - log_ab)(a - 1) > 0$
3) $log_af > log_ag \leftrightarrow \begin{cases}(f - \mathrm{g})(a - 1) \\ f > 0, \mathrm{g} > 0, \\ a > 0\end{cases}$

4) $log_a f > b \leftrightarrow \begin{cases} (f - a^b)(a-1) > 0 \\ f > 0 \\ a > 0 \end{cases}$

5) $log_a f + log_a g > 0 \leftrightarrow \begin{cases} (fg-1)(a-1) > 0 \\ f > 0, g > 0 \\ f > 0 \end{cases}$

6) $log_a f + b \leftrightarrow \begin{cases} (fa^b - 1)(a-1) > 0 \\ f > 0 \\ a > 0 \end{cases}$

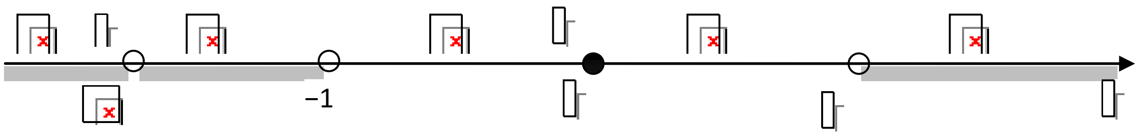
7) $\frac{a^{f_1} - a^{g_1}}{a^{f_2} - a^{g_2}} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$

8) $\frac{log_a f_1 - log_a g_1}{log_a f_2 - log_a g_2} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0 \\ f_i, g_i > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$

Пример 1. Решить неравенство: $\frac{(x^2-1)(x^2+x-2)}{8+2x-x^2} \leq 0$

Решение: Корни числителя: $1; -1; 1; \ -2$

Корни знаменателя: $4; \ -2$

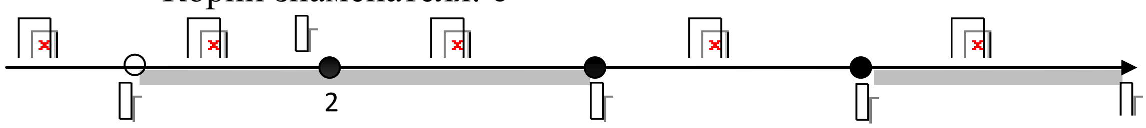


Ответ: $(-\infty; \ -2) \cup (-2; \ -1) \cup \{1\} \cup (4; \ +\infty)$

Пример 2. Решить неравенство: $\frac{(x^2-6x+8)(x^2-7x+10)}{x} \geq 0$

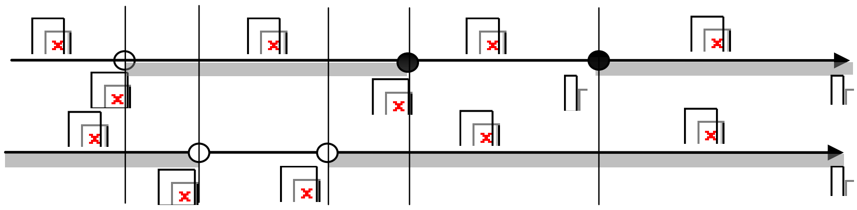
Решение: Корни числителя: $2; 4; 2; \ 5$

Корни знаменателя: 0



Ответ: $(0; 4] \cup [5; \ +\infty)$

Пример 3. Решить систему неравенств: $\begin{cases} \frac{x^2-4}{x+5} \geq 0 \\ x^2 + 7x + 12 > 0 \end{cases}$



Ответ: $(-5; -4) \cup (-3; -2] \cup [2; \ +\infty)$

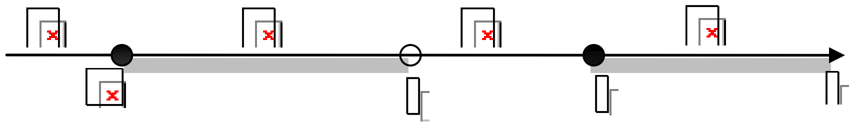
Пример 4. Решить неравенство $\frac{7^{x^2-3x} - 7^{x+5}}{0{,}3^x - 1} \leq 0$

Решение: В числителе левой части стоит разность значений возрастающей на R функции $f(t) = 7^t$.
В знаменателе тоже можно увидеть разность значений функции $g(t) = 0{,}3^t$, если представить единицу как $0{,}3^0$. Эта функция убывает на R. Значит, исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x^2 - 3x) - (x + 5)}{x - 0} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x} \geq 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов.
Корни числителя: $5; -1$
Корень знаменателя: 0



Ответ: $[-1;\ 0) \cup [5;\ +\infty)$

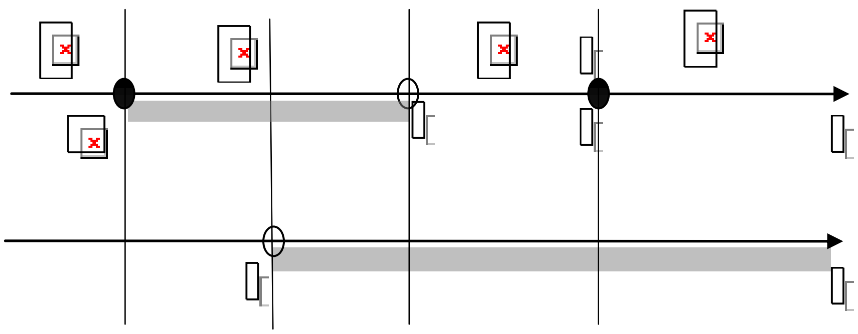
Пример 5. Решить неравенство $\frac{(log_2 x - 3)(x^2 - 7x - 8)}{log_{0,4} x} \geq 0$

Решение: Приведем неравенство к виду, в котором явно видна разность значений логарифмической функции:

$$\frac{(log_2 x - log_2 8)(x^2 - 7x - 8)}{log_{0,4} x - log_{0,4} 1} \geq 0$$

Заменим разность значений логарифмической функции на разность значений аргумента. В числителе функция возрастающая, а в знаменателе убывающая, поэтому знак неравенства изменится на противоположный. Важно не забыть учесть область определения логарифмической функции, поэтому данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x-8)(x^2-7x-8)}{x-1} \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$



Первое неравенство решим методом интервалов.
Корни числителя: $8; 8; -1$ Корень знаменателя: 1
Ответ: $(0; 1) \cup \{8\}$

Самостоятельная работа

1. *Рациональные неравенства*

1) Решите неравенство: $\frac{x^2-6x+8}{x-1} - \frac{x-4}{x^2-3x+2} \leq 0$
2) Решите неравенство: $(x^2 - 5{,}6x+7{,}84)(x - 2{,}5) \geq 0$
3) Решите неравенство: $\frac{2x^2-2x+1}{2x-1} \leq 1$
4) Решите неравенство: $\frac{x^2-5x-6}{x^2-1} \geq \frac{x-9}{x-1} + \frac{2}{x-3}$
5) Решите неравенство: $(10x + 7)(50x^2 - 5x - 28) < 0$

2. *Иррациональные неравенства*

1) Решите неравенство: $\frac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1} \geq \frac{1}{6x^2-5x}$
2) Решите неравенство $\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$
3) Решите неравенство $(x^2 - x - 6)\cdot \sqrt{8-x} \leq 0$
4) Решите неравенство: $\sqrt{x^2+22} \leq 5$
5) Решите неравенство: $\frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \geq \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2}$

3. *Показательные неравенства*

1) Решите неравенство: $2^{x^2} \leq 4\cdot 2^x$
2) Решите неравенство: $25^x + 5^{x+1} + 5^{1-x} + \frac{1}{25^x} \geq 12$
3) Решите неравенство: $3^x + 10\cdot 3^{-x} \leq 11$
4) Решите неравенство: $2^{2x-1} - 7\cdot 2^{x-1} + 5 \leq 0$
5) Решите неравенство: $5\cdot 2^{2x+2} - 21\cdot 2^{x-1} + 1 \geq 0$

4. *Логарифмические неравенства*

1) Решите неравенство: $log_5(3x+1) + log_5(\frac{1}{72x^2}+1) \geq log_5(\frac{1}{24x}+1)$
2) Решите неравенство: $log_2(x^2 - 4) - 3\, log_2\frac{x+2}{x-2} > 2$
3) Решите неравенство: $\frac{log_2 x-5}{1-2log_2 x} \geq 2\, log_2 x$
4) Решите неравенство: $log_3(x^2 - x - 2) \leq 1 + log_3\frac{x+1}{x-2}$
5) Решите неравенство: $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3} + \frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$

5. *Решить неравенства, используя метод замены множителей*

1) Решите неравенство: $log_{3x}(42x^2 - 13x+1) > 0$
2) Решите неравенство: $log_{2-x}(x+2)\cdot log_{x+3}(3-x) \leq 0$
3) Решите неравенство: $\frac{(2^x-128)(x^7-128)}{log_3(x^2-2x)-1} \leq 0$
4) Решите неравенство: $\frac{log_5(2x-3)}{log_{0.7}(4-x)} \geq 0$
5) Решите неравенство: $(x^2 - 5x+6)\sqrt{3-x} \geq 0$

Требования к оформлению практической работы

Расчётные задания должны быть выполнены в рабочей тетради.

Контрольные вопросы:

4. Что значит решить неравенство?
5. Что значит решить систему неравенств?
6. Перечислите способы решения систем неравенств.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основные источники:

1. Математика: учебник / А. А. Дадаян. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 544 с. – (Среднее профессиональное образование).
2. А. Г. Мордкович Алгебра и начала анализа. Часть 1. Учебник 10 – 11 классы - М.: Мнемозина, 2012 г.
3. А. Г. Мордкович Алгебра и начала анализа. Часть 2. Задачник 10 – 11 классы - М.: Мнемозина, 2012 г.
4. Н. Г. Федин, С. Н. Федин Геометрия- М.; «Высшая школа», 1989 г.

Дополнительные источники:

1. А. Н. Колмогоров Алгебра и начала анализа Учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений, М. - Просвещение, 2002 г.
2. А. П. Ершова, В. В. Голобородько Математика. Самостоятельные и контрольные работы 10 – 11 классы, М.; «Илекса», 2002 г.
3. А. П. Ершова, В. В, Голобородько «Геометрия 10 класс. Самостоятельные и контрольные работы» - дидактические материалы
4. Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов и др., Геометрия 10 – 11 классы, М.: Просвещение, 2004 г.