ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ АРХАНГЕЛЬСКОЙ ОБЛАСТИ
«МИРНИНСКИЙ ПРОМЫШЛЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

ОП.08 ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

для специальности: 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

2017 г.

Методические рекомендации для ОП.08 Дискретная математика разработаны для выполнения практических работ по одному из разделов – «Математической логике» и составлены в соответствии с рабочей программой и учебным планом по специальности 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы».

Организация-разработчик: государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Архангельской области «Мирнинский промышленно-экономический техникум»

Разработчики:
Пивоварова Т. В., Преподаватель техникума

ОДОБРЕНЫ цикловой комиссией дисциплин специальностей 09.02.01 и 13.02.11	Составлены в соответствии с требованиями ФГОС по специальности среднего профессионального образования 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы» и учебным планом
Председатель цикловой комиссии В.И.Письменник	Заместитель директора техникума по учебной работе М.Н.Венедиктова

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Математическая логика – один из ведущих разделов дискретной математики. Целью изучения этого раздела является усвоение аппарата и методов решения задач математической логики. После усвоения материала студент должен знать и уметь использовать язык математической логики; иметь навыки построения таблиц истинности, минимизации булевых функций и интерпретации формул в виде переключательных функций и контактных схем, а также нахождения базиса в пространстве функций алгебры двоичной логики.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА «Изучение законов алгебры логики»

Логика высказываний

Высказывания. Логические связки

Определение. Под ***высказыванием*** *принято понимать языковое предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно в данный момент времени.*

Высказывания чаще всего обозначают маленькими латинскими буквами a, b, c, x_1, x_2, …

В логике высказываний интересуются не содержанием, а истинностью или ложностью высказываний. Истинностные значения – истина и ложь – будем обозначать И и Л соответственно. Множество *{И, Л}* называется множеством истинностных значений.

Определение. Высказывание называют ***простым*** (*элементарным), если оно рассматривается как некое неделимое целое (аналогично элементу множества).* ***Сложным*** *(составным) называется высказывание, составленное из простых с помощью логических связок.*

В естественном языке роль связок при составлении сложных предложений из простых играют следующие грамматические средства: союзы «и», «или», «не»; слова «если …, то», «либо … либо», «тогда и только тогда, когда» и др. В логике высказываний логические связки, используемые для составления сложных высказываний, обязаны быть определены точно. Рассмотрим логические связки (операции) над высказываниями, при которых истинностные значения составных высказываний определяются только истинностными значениями составляющих высказываний, а не их смыслом.

В дальнейшем значению «истина» будем ставить в соответствие *1*, а «ложь» - *0*. Каждой логической операции ставится в соответствие ***таблица истинности***. Таблица истинности выражает значения истинности высказываний в зависимости от значений элементарных высказываний. В дальнейшем будем использовать таблицу истинности для установления истинностных значений сложных высказываний при данных значениях входящих в него элементарных высказываний.

Определение. ***Отрицанием*** *высказывания является новое высказывание, истинное только тогда, когда исходное высказывание ложно.*

№ набора	a	$\bar{a}$
0	*0*	*1*
1	*1*	*0*

Пример.

A – «Степан любит танцевать».

Тогда $\bar{a}$ - «Не верно, что Степан любит танцевать».

Определение. ***Конъюнкцией*** *двух высказываний является новое высказывание, которое истинно только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.*

№ набора	a	b	$a \wedge b$
0	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*0*
2	*1*	*0*	*0*
3	*1*	*1*	*1*

Пример.

a – «Степан любит танцевать», *b* – «Степан любит петь».

Тогда $à \wedge b$ - «Степан любит танцевать и петь».

№ набора	a	b	$a \vee b$

0	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*1*
2	*1*	*0*	*1*
3	*1*	*1*	*1*

Определение. ***Дизъюнкцией*** *двух высказываний является новое высказывание, которое ложно только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.*

Пример.

a – «Степан любит танцевать», *b* – «Степан любит петь».

Тогда $à \vee b$ - «Степан любит танцевать или петь».

Определение. ***Импликацией*** *двух высказываний является новое высказывание, которое ложно только тогда, когда первое истинно, а второе – ложно.*

№ набора	*a*	*b*	$a \to b$
0	*0*	*0*	*1*
1	*0*	*1*	*1*
2	*1*	*0*	*0*
3	*1*	*1*	*1*

Пример.

a – «Степан любит танцевать», *b* – «Степан любит петь».

Тогда $à \to b$ - «Если Степан любит танцевать, то он любит петь».

Определение. ***Эквиваленцией (или эквивалентностью)*** *двух высказываний является новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.*

№ набора	*a*	*b*	$a \approx b$
0	*0*	*0*	*1*
1	*0*	*1*	*0*
2	*1*	*0*	*0*
3	*1*	*1*	*1*

Пример.

a – «Степан любит танцевать», *b* – «Степан любит петь».

Тогда $à \approx b$ - «Для того, чтобы Степан любил танцевать, необходимо и достаточно, чтобы он любил петь».

Сведем все сказанное выше в единую таблицу и введем в рассмотрение еще три операции: сумма по модулю два, штрих Шеффера, стрелка Пирса.

Обозначения логической операции	Другие обозначения логической операции	Набор истинностных значений, отвечающих данной логической операции	Названия логической операции и связки	Как читается выражение, приведенное в первом столбце
$\neg a$		*10*	*отрицание*	*неверно, что a; не a*
$a \wedge b$	$a \,\&\, b$ $a \cdot b$ ab $min(a; b)$	*0001*	*конъюнкция, логическое умножение, логическое «и»*	*a и b*
$a \vee b$	$a+b$ $max(a; b)$	*0111*	*дизъюнкция, логическое сложение, логическое «или»*	*a или b*
$a \rightarrow b$	$a \supset b$ $a \Rightarrow b$	*1101*	*импликация, логическое следование*	*если a, то b;* *a имплицирует b; a влечет b*
$a \approx b$	$a \equiv b$ $a \leftrightarrow b$ $a \Leftrightarrow b$	*1001*	*эквиваленция, эквивалентность, равнозначность, тождественность*	*a тогда и только тогда, когда b; a эквивалентно b*
$a \oplus b$	$a+ b$ $a \,\Delta\, b$	*0110*	*сумма по модулю два, разделительная дизъюнкция, разделительное «или»*	*a плюс b;* *либо a, либо b*
$a \mid b$		*1110*	*штрих Шеффера, антиконъюнкция*	*неверно, что a и b; a штрих*

				Шеффера b
$a \downarrow b$	$a \circ b$	*1000*	*стрелка Пирса, антидизъюнкция, функция Вебба, функция Даггера*	*ни a, ни b; a стрелка Пирса b*

Формулы логики высказываний

Определение. ***Алфавитом*** *называется любое непустое множество. Элементы этого множества называются* ***символами*** *данного алфавита.* ***Словом*** *в данном алфавите называется произвольная конечная последовательность символов (возможно пустая).*

Алфавит логики высказываний содержит следующие символы:

- высказывательные переменные;
- логические символы;
- символы скобок.

Определение. Слово в алфавите логики высказываний называется ***формулой****, если оно удовлетворяет следующему определению:*

1) *любая высказывательная переменная – формула;*
2) *если A и B – формулы, то* $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \oplus B$, $A \approx B$, $A \mid B$, $A \downarrow B$ *– формулы;*
3) *только те слова являются формулами, для которых это следует из 1) и 2).*

Определение. ***Подформулой*** *формулы A называется любая ее часть, которая сама является формулой.*

Пример.

Представить логическими формулами следующие высказывания:

1. «Сегодня понедельник или вторник».
2. «Идет снег или дождь».
3. «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые».
4. «Что в лоб, что по лбу».

Решение.

1. Составное (сложное) высказывание «Сегодня понедельник или вторник» состоит из двух простых:

- ✓ a – «сегодня понедельник»;
- ✓ b – «сегодня вторник».

Высказывания a и b соединены связкой «или» очевидно в разделительном смысле (не допускается одновременное выполнение обоих условий), то есть используется логическая связка «сумма по модулю два». Таким образом, данное высказывание представимо логической формулой: $a \oplus b$.

2. Высказывание «Идет снег или дождь» также состоит из двух простых, соединенных связкой «или»:

- ✓ a – «идет снег»;
- ✓ b – «идет дождь».

Но в отличие от предыдущего связка «или» использована здесь не в разделительном смысле, поэтому – используется логическая связка дизъюнкция и логическая формула имеет вид: $a \vee b$.

3. Сложное высказывание «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые» включает два простых высказывания:

- ✓ a – «идет дождь»;
- ✓ b – «крыши мокрые».

В первом предложении «Если идет дождь, то крыши мокрые» высказывания a, b соединены связкой «если …, то…»: $a \to b$.

Во втором «Дождя нет, а крыши мокрые» союз «а» здесь имеет смысл связки «и» ($\wedge$), и кроме того высказывание a следует взять с отрицанием: $\bar{a} \wedge b$.

Остается объединить представленные выше два высказывания в одно связкой $\wedge$:

$$(a \to b) \wedge (\bar{a} \wedge b).$$

4. Высказывание «Что в лоб, что по лбу», если обозначить:

- ✓ a – «в лоб»,
- ✓ b – «по лбу»,

представимо логической формулой $a \approx b$.

Пример.

Представить логической формулой следующий текст:
«Если фирма продолжает выпуск существующего продукта и ориентирована на существующий рынок, то для нее целесообразна стратегия «малого корабля», или экономии издержек. Такая стратегия привлекательна, если интенсивный маркетинг – стратегический хозяйственный фактор, но слабая сторона организации. Если интенсивный маркетинг является стратегическим хозяйственным фактором и сильной стороной фирмы, то фирме следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для существующего продукта.»

Введем обозначения простых высказываний, содержащихся в первом предложении:

A – «фирма продолжает выпуск существующего продукта»;

B – «фирма ориентирована на существующий рынок;

C – «для фирмы целесообразна (привлекательна) стратегия «малого корабля»;

D – «для фирмы целесообразна (привлекательна) стратегия экономии издержек»;

С учетом введенных обозначений логическая формула для первого предложения примет вид:

$$(A \wedge B) \rightarrow (C \sim D).$$

Второе предложение содержит новые простые высказывания:

K – «интенсивный маркетинг является стратегическим хозяйственным фактором организации»;

L – «интенсивный маркетинг является слабой стороной организации».

Логическая формула, представляющая второе предложение:

$$(K \wedge L) \rightarrow (C \sim D).$$

В третьем предложении содержатся новые простые высказывания:

M – «интенсивный маркетинг является сильной стороной организации»;

N – «фирме следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для существующего продукта».

Логическая формула для третьего предложения:

$$(K\wedge M)\to N.$$

Окончательно текст записывается следующей логической формулой:

$$((A\wedge B)\to(C\sim D))\wedge(\ (K\wedge L\ )\to(C\sim D))\wedge(\ (K\wedge M)\to N).$$

Для каждой формулы логики высказываний можно построить таблицу истинности.

Определение. Формула называется ***выполнимой (опровержимой)****, если существует такой набор значений переменных, при которых эта формула принимает значение 1 (0).*

Определение. Формула называется ***тождественно-истинной****, или* ***тавтологией*** *(****тождественно-ложной*** *или* ***противоречием****), если эта формула принимает значение 1 (0) при всех наборах значений переменных.*

Пример 22.

Составить таблицы истинности для формул:

1. $(x\wedge y)\vee x$;
2. $(x\to\overline{y})\to(\overline{x\vee y}\wedge z)$.

Решение.

1. Таблица истинности для формулы $(x\wedge y)\vee x$ имеет вид:

№	x	y	$x\wedge y$	$(x\wedge y)\vee x$
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0
2	1	0	0	1
3	1	1	1	1

2. Таблица истинности для формулы $(x \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \wedge z)$ имеет вид:

№	x	y	z	$\bar{y}$	$x \to \bar{y}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x \vee y} \wedge z$	$(x \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \wedge z)$
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
2	0	1	0	0	1	1	0	0	0
3	0	1	1	0	1	1	0	0	0
4	1	0	0	1	1	1	0	0	0
5	1	0	1	1	1	1	0	0	0
6	1	1	0	0	0	1	0	0	1
7	1	1	1	0	0	1	0	0	1

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА «Выполнение равносильных преобразований по формулам логики высказываний»

Определение. Пусть A и B – две формулы, зависящие от одного и того же списка переменных. Будем называть их ***равносильными****, если для любого набора значений переменных они принимают одинаковые значения.*

Рассмотрим основные равносильности логики высказываний.

Пусть *A, B, C* – произвольные формулы. Тогда справедливы следующие свойства логических операций:

1. Идемпотентность	
$A \wedge A = A$	$A \vee A = A$
2. Коммутативность	
$A \wedge B = B \wedge A$	$A \vee B = B \vee A$
3. Ассоциативность	
$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
4. Правила поглощения	
$A \wedge (A \vee B) = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$
5. Дистрибутивность	

A ∧ (B ∨ C) = (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)	A ∨ (B ∧ C) = (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)
6. Правила де Моргана	
$\overline{\grave{A}\wedge\hat{A}}=\overline{\grave{A}}\vee\overline{\hat{A}}$	$\overline{\grave{A}\vee\hat{A}}=\overline{\grave{A}}\wedge\overline{\hat{A}}$
7. Свойства констант	
A ∧ 1 = A	A ∨ 0 = A
A ∧ 0 = 0	A ∨ 1 = 1
8. Закон исключения третьего и закон противоречия	
$\grave{A}\wedge\overline{\grave{A}}=0$	$\grave{A}\vee\overline{\grave{A}}=1$
9. Снятие двойного отрицания	
$\overline{\overline{\grave{A}}}=\grave{A}$	
10. Формулы расщепления (склеивания)	
$(\grave{A}\wedge\hat{A})\vee\left(\grave{A}\wedge\overline{\hat{A}}\right)=\grave{A}$	$(\grave{A}\vee\hat{A})\wedge\left(\grave{A}\vee\overline{\hat{A}}\right)=\grave{A}$
11. Связь дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и импликации	
$\grave{A}\rightarrow\hat{A}=\overline{\grave{A}}\vee\hat{A}=\overline{\grave{A}\wedge\overline{\hat{A}}}=\overline{\hat{A}}\rightarrow\overline{\grave{A}}$	
12. Выражение эквивалентности	
$\grave{A}\approx\hat{A}=\left(\overline{\grave{A}}\vee\hat{A}\right)\wedge\left(\overline{\hat{A}}\vee\grave{A}\right)=(\grave{A}\wedge\hat{A})\vee\left(\overline{\grave{A}}\wedge\overline{\hat{A}}\right)$	

Любая из этих равносильностей легко может быть доказана с помощью таблицы истинности.

Пример.

Рассмотрим одно из правил поглощения A ∧ (A ∨ B) = A.

A	*B*	*A∨B*	*A∧(A∨B)*
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

По таблице 12 видно, что результирующий столбец и столбец *A* совпадают на все наборах. Значит, формулы действительно равносильны.

Однако часто равносильность экономнее доказывать без составления полной таблицы истинности, а с помощью приведенных выше равносильностей.

Пример.

1. Доказать равносильность формулы, используя логические законы: $\overline{a \to b} \equiv a \wedge \bar{b}$.

2. Упростить формулу: $\left(\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee \bar{x}\right) \wedge \overline{x \vee \overline{\bar{x} \wedge y}}$.

3. Определить, является ли формула тавтологией, противоречием или ни тем, ни другим:

a) $a \wedge \overline{(a \vee b)}$;

b) $a \to (a \wedge b)$;

c) $((a \to b) \wedge b) \to a$;

d) $(a \to b) \to a$;

e) $\bar{a} \to (a \to b)$.

Решение.

1. $\overline{a \to b} \equiv |11| \equiv \overline{\bar{a} \vee b} \equiv |6| \equiv \bar{\bar{a}} \wedge \bar{b} \equiv |9| \equiv a \wedge \bar{b}$.

2. $\left(\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee \bar{x}\right) \wedge \overline{x \vee \overline{\bar{x} \wedge y}} \equiv |6| \equiv \left(\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} \vee \bar{x}\right) \wedge \left(\bar{x} \wedge \overline{\overline{\bar{x} \wedge y}}\right) \equiv |9| \equiv \left(x \vee y \vee \bar{x}\right) \wedge \left(\bar{x} \wedge \bar{x} \wedge y\right) \equiv |2, 1| \equiv$
$\equiv \left(\left(x \vee \bar{x}\right) \vee y\right) \wedge \left(\bar{x} \wedge y\right) \equiv |8, 3| \equiv (1 \vee y) \wedge \bar{x} \wedge y \equiv |7| \equiv 1 \wedge \bar{x} \wedge y \equiv |7| \equiv \bar{x} \wedge y.$

3. a) $a \wedge \overline{(a \vee b)} \equiv |6| \equiv a \wedge \left(\bar{a} \wedge \bar{b}\right) \equiv |3| \equiv a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b} \equiv |8| \equiv 0 \wedge \bar{b} \equiv |7| \equiv 0$

Поскольку формула при любых значениях переменных равна нулю, то данная формула является противоречием.

b) $a \to (a \wedge b) \equiv |11| \equiv \bar{a} \vee (a \wedge b) \equiv |5| \equiv \left(\bar{a} \vee a\right) \wedge \left(\bar{a} \vee b\right) \equiv |8| \equiv 1 \wedge \left(\bar{a} \vee b\right) \equiv |7| \equiv \bar{a} \vee b$.

Исходная формула не является ни тавтологией, ни противоречием, поскольку её значение зависит от значений переменных.

c) $((a \to b) \wedge b) \to a \equiv |11| \equiv \left(\overline{\left(\bar{a} \vee b\right) \wedge b}\right) \vee a \equiv |6| \equiv \left(\overline{\bar{a} \vee b} \vee \bar{b}\right) \vee a \equiv |6, 3| \equiv \left(\bar{\bar{a}} \wedge \bar{b}\right) \vee \bar{b} \vee a \equiv |4| \equiv$
$\equiv \bar{b} \vee a.$

Исходная формула не является ни тавтологией, ни противоречием, поскольку её значение зависит от значений переменных.

d) $(a \to b) \to a \equiv |11| \equiv \left(\overline{\bar{a} \vee b}\right) \vee a \equiv |6, 9| \equiv \left(a \wedge \bar{b}\right) \vee a \equiv |4| \equiv a.$

Исходная формула не является ни тавтологией, ни противоречием, поскольку её значение зависит от значений переменных.

е) $\bar{a} \to (a \to b) \equiv |11, 3| \equiv \bar{\bar{a}} \vee \bar{a} \vee b \equiv |9| \equiv a \vee \bar{a} \vee b \equiv |8, 7| \equiv 1.$

Поскольку формула при любых значениях переменных равна единице, то данная формула является тавтологией.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА « Построение минимальной ДНФ при помощи карт Карно»

Нормальные формы

Определение. ***Элементарной конъюнкцией*** *называется конъюнкция, составленная из попарно различных переменных или отрицаний переменных.*

Иногда будем допускать в элементарной конъюнкции наличие повторов элементов.

Определение. ***Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*** *называется дизъюнкция попарно различных элементарных конъюнкций.*

Иногда будем допускать в ДНФ наличие повторов элементов.

Пример.

Следующие формулы находятся в ДНФ: $x \wedge y;\ \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3};\ ab \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}c;\ x \vee xy$.

Определение. ***Элементарной дизъюнкцией*** *называется дизъюнкция, составленная из попарно различных переменных или отрицаний переменных.*

Иногда будем допускать в элементарной дизъюнкции наличие повторов элементов.

Определение. ***Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)*** *называется конъюнкция попарно различных элементарных дизъюнкций.*

Иногда будем допускать в КНФ наличие повторов элементов.

Пример.

Следующие формулы находятся в КНФ: $x \vee \bar{y};\ (x \vee y)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$.

Совершенные нормальные формы

Определение. Совершенной дизъюнктивной формулой формулы алгебры высказываний (СДНФ) **называется ДНФ, в которой:**

1. различны все члены дизъюнкции;
2. *различны все члены каждой конъюнкции;*
3. *ни одна конъюнкция не содержит одновременно переменную и отрицание этой переменной;*
4. *каждая конъюнкция содержит все переменные, входящие в формулу, т. е. имеет вид*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{F(c_1, ..., c_n)=1} x_1^{c_1} ... x_n^{c_n},$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, ..., c_n)$ *из 0 и 1, для которых* $F(\boldsymbol{c})=1$.

Теорема (о СДНФ). Для всякой не равной тождественному нулю формулы логики высказываний $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ *существует такая формула* F_1*, зависящая от того же списка переменных и находящаяся в СДНФ относительно этого списка, что* F_1 *выражает собой формулу* F*. Формула* F_1 *определена однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.*

Определение. ***Совершенной конъюнктивной формулой формулы алгебры высказываний (СКНФ)*** *называется КНФ, в которой:*

1. *различны все члены конъюнкции;*
2. *различны все члены каждой дизъюнкции;*
3. *ни одна дизъюнкция не содержит переменную вместе с отрицанием этой переменной;*
4. *каждая дизъюнкция содержит все переменные, входящие в исходную формулу, т. е. имеет вид*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{F(c_1, ..., c_n)=0} (x_1^{\overline{c_1}} \vee ... \vee x_n^{\overline{c_n}}),$$

где конъюнкция берется по всем наборам $\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, ..., c_n)$ *из 0 и 1, для которых* $F(\boldsymbol{c})=0$.

Теорема (о СКНФ). Для всякой не равной тождественной единице формулы логики высказываний $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ существует такая формула F_1, зависящая от того же списка переменных и находящаяся в СКНФ относительно этого списка, что F_1 выражает собой формулу F. Формула F_1 определена однозначно с точностью до перестановки конъюнктивных членов.

Опишем два способа приведения к совершенным нормальным формам.

1-й способ – аналитический.

Приведение к СДНФ. Алгоритм приведения.

1. привести формулу с помощью равносильных преобразований к ДНФ.
2. удалить члены дизъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);
3. из одинаковых членов дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
4. из одинаковых членов каждой конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
5. если в какой-нибудь конъюнкции не содержится переменной x_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой конъюнкции член $x_i \vee \overline{x_i}$ и применить закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции;
6. если в полученной дизъюнкции окажутся одинаковые члены, воспользоваться предписанием из п. 3.

Полученная формула и является СДНФ данной формулы.

Пример.

Привести следующие формулы к СДНФ с помощью равносильных преобразований:

1. $(x \vee y)(x \vee \overline{y})$;

2. $x(\overline{y} \vee z)$;

3. $(x \to y)xy$.

Решение.

1. $(x \vee y)(x \vee \bar{y}) \equiv x \equiv x(y \vee \bar{y}) \equiv xy \vee x\bar{y}$.

2. $x(\bar{y} \vee z) \equiv x\bar{y} \vee xz \equiv x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee xz(y \vee \bar{y}) \equiv |5| \equiv x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xzy \vee xz\bar{y} \equiv x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz.$

3. $(x \to y)xy \equiv (\bar{x} \vee y)xy \equiv \bar{x}xy \vee yxy \equiv xy.$

Приведение к СКНФ. Алгоритм приведения.

1. привести формулу с помощью равносильных преобразований к КНФ.
2. удалить члены конъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием (если такие окажутся);
3. из одинаковых членов конъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
4. из одинаковых членов каждой дизъюнкции (если такие окажутся) удалить все, кроме одного;
5. если в какой-нибудь дизъюнкции не содержится переменной x_i из числа переменных, входящих в исходную формулу, добавить к этой дизъюнкции член $x_i \wedge \overline{x_i}$ и применить закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции;
6. если в полученной конъюнкции окажутся одинаковые члены, воспользоваться предписанием из п. 3.

Полученная формула и является СКНФ данной формулы.

Пример.

Привести следующие формулы к СКНФ с помощью равносильных преобразований:

1. $x(\bar{y} \vee z)$;

2. $(x \to y)xy$.

Решение.

1. $$x\left(\overline{y}\vee z\right)\equiv\left(x\vee y\overline{y}\vee z\overline{z}\right)\left(\overline{y}\vee z\vee x\overline{x}\right)\equiv\left(x\vee y\vee z\right)\left(x\vee y\vee \overline{z}\right)\left(x\vee \overline{y}\vee z\right)\left(x\vee \overline{y}\vee \overline{z}\right)\wedge$$
$$\wedge\left(x\vee \overline{y}\vee z\right)\left(\overline{x}\vee \overline{y}\vee z\right)\equiv\left(x\vee y\vee z\right)\left(x\vee y\vee \overline{z}\right)\left(x\vee \overline{y}\vee z\right)\left(x\vee \overline{y}\vee \overline{z}\right)\left(\overline{x}\vee \overline{y}\vee z\right).$$

2. $$(x\to y)xy\equiv\left(\overline{x}\vee y\right)xy\equiv\left(\overline{x}\vee y\right)\left(x\vee y\overline{y}\right)\left(y\vee x\overline{x}\right)\equiv\left(\overline{x}\vee y\right)\left(x\vee y\right)\left(x\vee \overline{y}\right)\left(y\vee x\right)\left(y\vee \overline{x}\right)\equiv$$
$$\equiv\left(x\vee y\right)\left(x\vee \overline{y}\right)\left(\overline{x}\vee y\right).$$

2-й способ – табличный.

Составляем таблицу истинности для данной функции.

Приведение к СДНФ. Алгоритм приведения.

Строим таблицу значений формулы. Рассматриваем только те строки, в которых значение формулы равно единице. Каждой такой строке соответствует конъюнкция всех аргументов (без повторений). Причем, аргумент, принимающий значение 0, входит в нее с отрицанием, значение 1 – без отрицания. Наконец, образуем дизъюнкцию всех полученных конъюнкций.

Пример.

Построить СДНФ для данных формул логики высказываний.

1. $F=x\left(\overline{y}\vee z\right).$

2. $F=(x\to y)xy.$

Решение.

1. $F=x\left(\overline{y}\vee z\right).$

Строим таблицу истинности для формулы F:

№	x	y	z	$\overline{y}$	$\overline{y}\vee z$	$F=x\left(\overline{y}\vee z\right)$
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0

2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1

Рассматриваем только 4, 5 и 7 наборы, так как только на этих наборах формула принимает значение равное единице.

СДНФ имеет вид: $F = x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz.$

2. $F = (x \to y)xy.$

Строим таблицу истинности для формулы F:

№	*x*	*y*	$x \to y$	$F=(x \to y) \wedge x \wedge y$
0	0	0	1	0
1	0	1	1	0
2	1	0	0	0
3	1	1	1	1

СДНФ (1): *№ 3*:

$F = x\,y.$

Приведение к СКНФ. Алгоритм приведения.

Рассматриваем только те строки таблицы, где формула принимает значение 0. Каждой такой строке соответствует дизъюнкция всех переменных (без повторений). Причем аргумент, принимающий значение 0, берется без отрицания, значение 1 – с отрицанием. Наконец, образуют конъюнкцию полученных дизъюнкций.

Пример.

Построить СКНФ для данных формул логики высказываний.

1. $F = x(\overline{y} \vee z)$.

2. $F = (x \to y)xy$.

Решение.

1. Строим таблицу значений, используя предыдущий пример.

№	x	y	z	$F = x(\overline{y} \vee z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Рассматриваем только наборы, на которых формула принимает значение ноль.

СКНФ (0): № *0, 1, 2, 3, 6*:

$F = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$

2. Строим таблицу значений, используя предыдущий пример.

№	x	y	$F=(x \to y) \wedge x \wedge y$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

СКНФ (0): *№ 0, 1, 2*:

$F = (x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y).$

Представление булевой функции формулой логики высказываний

Определение. ***Булевой функцией*** *$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется n-местная функция, аргументы которой принимают значения во множестве {0, 1} и сама функция принимает значения в этом же множестве.*

Всякую булеву функцию от n переменных можно задать таблицей из 2^n строк, в которой в каждой строке записывают одну из оценок списка переменных, принимающих значение 0 или 1.

Пример.

Для $n=3$ булеву функцию можно задать таблицей.

№	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	$f(0, 0, 0)$

1	0	0	1	*f(0, 0, 1)*
2	0	1	0	*f(0, 1, 0)*
3	0	1	1	*f(0, 1, 1)*
4	1	0	0	*f(1, 0, 0)*
5	1	0	1	*f(1, 0, 1)*
6	1	1	0	*f(1, 1, 0)*
7	1	1	1	*f(1, 1, 1)*

Используется также задание булевой функции в виде двоичного слова, длина которого зависит от числа переменных.

Пример.

Пусть задана булева функция от трех переменных. Тогда число наборов $2^3 = 8$.

№ набора	x_1	x_2	x_3	f
0	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*0*	*1*	*0*
2	*0*	*1*	*0*	*1*
3	*0*	*1*	*1*	*0*
4	*1*	*0*	*0*	*1*
5	*1*	*0*	*1*	*1*
6	*1*	*1*	*0*	*0*
7	*1*	*1*	*1*	*1*

Номера наборов всегда нумеруются, начиная с нуля, в таблице приведено стандартное расположение всех наборов функции трех переменных (обратите внимание, что каждый набор представляет собой двоичный код числа, равный номеру соответствующего набора). Первые четыре столбца одинаковы для всех булевых функций от трех переменных. Столбец значений функции задается или вычисляется.

Эту же функцию можно записать $f(x_1, x_2, x_3)=00101101$.

Существует ровно 2^{2^n} различных булевых функций от n переменных. Константы 0 и 1 считают нуль-местными булевыми функциями.

Утверждение. Каждой формуле логики высказываний соответствует некоторая булева функция.

Пример.

Построить все булевы функции, зависящие от двух переменных.

Решение.

Поскольку $n=2$, различных булевых функций от двух переменных существует ровно 16.

№ функции	*Значение функции*	*Формула, соответствующая функции*
1	$f=0000$	$f=0$
2	$f=0001$	$f=x_1 \wedge x_2$
3	$f=0010$	$f=\overline{x_1 \to x_2}$
4	$f=0011$	$f=x_1$
5	$f=0100$	$f=\overline{x_1} \wedge x_2$
6	$f=0101$	$f=x_2$
7	$f=0110$	$f=x_1 \oplus x_2$
8	$f=0111$	$f=x_1 \vee x_2$
9	$f=1000$	$f=\overline{x_1 \wedge x_2}$
.10	$f=1001$	$f=x_1 \approx x_2$
.11	$f=1010$	$f=\overline{x_2}$

.12	*f=1011*	*f*= $x_1 \vee \overline{x_2}$
.13	*f=1100*	*f*= $\overline{x_1}$
.14	*f=1101*	*f*= $x_1 \rightarrow x_2$
.15	*f=1110*	*f*= $\overline{x_1 \vee x_2}$
.16	*f=1111*	*f=1*

Теорема. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *k-местная булева функция. Если f не равна тождественно нулю, то существует такая формула F, зависящая от списка переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *и находящаяся в СДНФ относительно этого списка, что F выражает собой функцию f. Формула F определена однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.*

Теорема 2. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *k-местная булева функция. Если f не равна тождественно единице, то существует такая формула F, зависящая от списка переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *и находящаяся в СКНФ относительно этого списка, что F выражает собой функцию f. Формула F определена однозначно с точностью до перестановки конъюнктивных членов.*

Поскольку каждая булева функция представима в виде формулы логики высказываний, то принцип построения СДНФ и СКНФ сохраняется такой же как и для формул логики высказываний.

Пример.

Построить СКНФ и СДНФ булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = 00101110$.

Решение.

Строим таблицу значений функции:

№	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0

4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

СКНФ (0): № 0, 1, 3, 7

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

СДНФ (1): № 2, 4, 5, 6

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3} \vee x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_3} \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1\, x_2\, \overline{x_3}.$$

Минимизация нормальных форм

Выше было сказано, что произвольная булева функция может быть представлена формулой в дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной форме. Равносильными преобразованиями можно получить формулу, содержащую меньшее, чем исходная, число переменных.

Определение. ***Минимальной ДНФ (МДНФ)*** *функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ДНФ, реализующая функцию f и содержащая минимальное число символов переменных по сравнению со всеми другими ДНФ, реализующими функцию f.*

Минимальную ДНФ данной формулы можно найти, перебрав конечное число равносильных ей ДНФ и выбрав среди них ту, которая содержит минимальное число переменных. Однако при большом числе переменных такой перебор практически невыполним. Существуют эффективные способы нахождения минимальной ДНФ. Рассмотрим два из них.

Каждый из рассмотренных ниже методов состоит из двух этапов:

- построение сокращенной ДНФ;
- построение матрицы покрытий. Построение МДНФ.

Определение. Если для всякого набора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значений переменных условие $g(a) = 1$ влечет $f(a) = 1$, то функция g называется ***частью функции*** *f (или функция* ***f накрывает функцию g****). Если при этом для некоторого набора $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$функция $g(c)=1$, то говорят, что функция g накрывает единицу функции f на наборе c (или что g накрывает конституенту единицы $x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}$ функции f).*

Конституента единицы функции f есть часть функции f, накрывающая единственную единицу функции f.

Определение. Элементарная конъюнкция K называется ***импликантом*** *функции f, если для всякого набора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из 0 и 1 условие $K(a)=1$ влечет $f(a)=1$.*

Определение. Импликант K функции f называется простым, если выражение, получающееся из него выбрасыванием любых множителей, уже не импликант функции f.

Всякий импликант функции *f* есть часть функции *f*.

Теорема. Всякая функция реализуется дизъюнкцией всех своих простых импликант.

Определение. ***Сокращенная ДНФ*** *функции f есть дизъюнкция всех простых импликант функции f.*

Утверждение. Всякая функция f реализуется своей сокращенной ДНФ. Для всякой функции, не равной тождественно нулю, существует единственная сокращенная ДНФ. Пусть булева функция задана таблицей истинности или СДНФ.

Минимизирующая карта булевой функции представляет собой квадратную матрицу $2^n \times 2^n$, где n – число переменных. Первые столбцы отводят для аргументов, дальнейшие – для их всевозможных конъюнкций по 2, по 3 и т. д. сомножителей, предпоследний - для конъюнкции всех аргументов, последний – для значений функции.

Шаг 1. Столбцы для аргументов, как обычно в таблицах истинности, заполняются всевозможными наборами 0 и 1. В столбцах для конъюнкций проставляются десятичные значения двоичных чисел, соответствующих наборам значений аргументов. Последний столбец заполняется соответственно значению функции.

Далее работа чередуется по строкам, по столбцам.

Шаг 2. Вычеркиваются строки, в которых функция обращается в нуль.

Шаг 3. В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркивают те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге.

Шаг 4. В сохранившихся строках выбирают «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводят их кружочками.

Шаг 5. Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркивают все, кроме одного.

Шаг 6. С помощью оставшихся обведенных чисел образуют конъюнкции. Для этого переводят каждое число в двоичную систему. Переменную, которой соответствует 1, берут сомножителем без отрицания, которой соответствует 0 – с отрицанием.

Шаг 8. Составляют дизъюнкцию полученных конъюнкций. В результате получаем сокращенную ДНФ функции.

Пример.

Построить сокращенную ДНФ для функции $f=11100101$.

Решение.

1.Строим минимизационную карту:

№	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	*1*
1	0	0	1	0	1	1	1	*1*
2	0	1	0	1	0	2	2	*1*
3	0	1	1	1	1	3	3	*0*
4	1	0	0	2	2	0	4	*0*
5	1	0	1	2	3	1	5	*1*
6	1	1	0	3	2	2	6	*0*
7	1	1	1	3	3	3	7	*1*

2. Вычеркиваем строки, в которых функция обращается в нуль:

№	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	*1*
1	0	0	1	0	1	1	1	*1*
2	0	1	0	1	0	2	2	*1*
3	0	1	1	1	1	3	3	*0*
4	1	0	0	2	2	0	4	*0*
5	1	0	1	2	3	1	5	*1*
6	1	1	0	3	2	2	6	*0*
7	1	1	1	3	3	3	7	*1*

3. В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркиваем те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге:

Таблица 26

№	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	*1*
1	0	0	1	0	1	1	1	*1*
2	0	1	0	1	0	2	2	*1*
3	0	1	1	1	1	3	3	*0*
4	1	0	0	2	2	0	4	*0*
5	1	0	1	2	3	1	5	*1*
6	1	1	0	3	2	2	6	*0*
7	1	1	1	3	3	3	7	*1*

4. В сохранившихся строках выбираем «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводим их:

№	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	*1*
1	0	0	1	0	1	1	1	*1*
2	0	1	0	1	0	2	2	*1*
3	0	1	1	1	1	3	3	*0*
4	1	0	0	2	2	0	4	*0*
5	1	0	1	2	3	1	5	*1*
6	1	1	0	3	2	2	6	*0*
7	1	1	1	3	3	3	7	*1*

5. Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркиваем все, кроме одного:

№	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$

0	0	0	0	0	0	0	0	*1*
1	0	0	1	0	1	1	1	*1*
2	0	1	0	1	0	2	2	*1*
3	0	1	1	1	1	3	3	*0*
4	1	0	0	2	2	0	4	*0*
5	1	0	1	2	3	1	5	*1*
6	1	1	0	3	2	2	6	*0*
7	1	1	1	3	3	3	7	*1*

6. С помощью оставшихся обведенных чисел образуем конъюнкции. Для этого переводим каждое число в двоичную систему. Переменную, которой соответствует 1, берем сомножителем без отрицания, 0 – с отрицанием. Составляем дизъюнкцию полученных конъюнкций.

Сокращенная ДНФ имеет вид:
$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2}\, x_3.$

Пример.

Построить сокращенную ДНФ функции *f=1111010010101111* с использованием минимизационной карты.

Решение.

Строим минимизационную карту и пошагово выполняем алгоритм.

Шаг 1.

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
2	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**2**	**2**	**2**	**1**
3	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**1**
4	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**	**2**	**2**	**0**	**4**	**4**	**0**

5	***0***	***1***	***0***	***1***	***1***	***0***	***1***	***2***	***3***	***1***	***2***	***3***	***1***	***5***	***5***	***1***
6	***0***	***1***	***1***	***0***	***1***	***1***	***0***	***3***	***2***	***2***	***3***	***2***	***2***	***6***	***6***	***0***
7	***0***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***3***	***3***	***3***	***3***	***3***	***3***	***7***	***7***	***0***
8	***1***	***0***	***0***	***0***	***2***	***2***	***2***	***0***	***0***	***0***	***4***	***4***	***4***	***0***	***8***	***1***
9	***1***	***0***	***0***	***1***	***2***	***2***	***3***	***0***	***1***	***1***	***4***	***5***	***5***	***1***	***9***	***0***
10	***1***	***0***	***1***	***0***	***2***	***3***	***2***	***1***	***0***	***2***	***5***	***4***	***6***	***2***	***10***	***1***
11	***1***	***0***	***1***	***1***	***2***	***3***	***3***	***1***	***1***	***3***	***5***	***5***	***7***	***3***	***11***	***0***
12	***1***	***1***	***0***	***0***	***3***	***2***	***2***	***2***	***2***	***0***	***6***	***6***	***4***	***4***	***12***	***1***
13	***1***	***1***	***0***	***1***	***3***	***2***	***3***	***2***	***3***	***1***	***6***	***7***	***5***	***5***	***13***	***1***
14	***1***	***1***	***1***	***0***	***3***	***3***	***2***	***3***	***2***	***2***	***7***	***6***	***6***	***6***	***14***	***1***
15	***1***	***1***	***1***	***1***	***3***	***3***	***3***	***3***	***3***	***3***	***7***	***7***	***7***	***7***	***15***	***1***

Шаг 2. Вычеркиваем строки, в которых функция обращается в нуль:

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***1***
1	***0***	***0***	***0***	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***	***1***	***1***	***0***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
2	***0***	***0***	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***	***1***	***0***	***2***	***1***	***0***	***2***	***2***	***2***	***1***
3	***0***	***0***	***1***	***1***	***0***	***1***	***1***	***1***	***1***	***3***	***1***	***1***	***3***	***3***	***3***	***1***
4	***0***	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***	***0***	***2***	***2***	***0***	***2***	***2***	***0***	***4***	***4***	***0***
5	***0***	***1***	***0***	***1***	***1***	***0***	***1***	***2***	***3***	***1***	***2***	***3***	***1***	***5***	***5***	***1***
6	***0***	***1***	***1***	***0***	***1***	***1***	***0***	***3***	***2***	***2***	***3***	***2***	***2***	***6***	***6***	***0***
7	***0***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***3***	***3***	***3***	***3***	***3***	***3***	***7***	***7***	***0***
8	***1***	***0***	***0***	***0***	***2***	***2***	***2***	***0***	***0***	***0***	***4***	***4***	***4***	***0***	***8***	***1***
9	***1***	***0***	***0***	***1***	***2***	***2***	***3***	***0***	***1***	***1***	***4***	***5***	***5***	***1***	***9***	***0***
10	***1***	***0***	***1***	***0***	***2***	***3***	***2***	***1***	***0***	***2***	***5***	***4***	***6***	***2***	***10***	***1***
11	***1***	***0***	***1***	***1***	***2***	***3***	***3***	***1***	***1***	***3***	***5***	***5***	***7***	***3***	***11***	***0***
12	***1***	***1***	***0***	***0***	***3***	***2***	***2***	***2***	***2***	***0***	***6***	***6***	***4***	***4***	***12***	***1***
13	***1***	***1***	***0***	***1***	***3***	***2***	***3***	***2***	***3***	***1***	***6***	***7***	***5***	***5***	***13***	***1***
14	***1***	***1***	***1***	***0***	***3***	***3***	***2***	***3***	***2***	***2***	***7***	***6***	***6***	***6***	***14***	***1***

15	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	15	1

Шаг 3. В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркиваем те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге:

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	2	2	1
3	0	0	1	1	0	1	1	1	1	3	1	1	3	3	3	1
4	0	1	0	0	1	0	0	2	2	0	2	2	0	4	4	0
5	0	1	0	1	1	0	1	2	3	1	2	3	1	5	5	1
6	0	1	1	0	1	1	0	3	2	2	3	2	2	6	6	0
7	0	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	0
8	1	0	0	0	2	2	2	0	0	0	4	4	4	0	8	1
9	1	0	0	1	2	2	3	0	1	1	4	5	5	1	9	0
10	1	0	1	0	2	3	2	1	0	2	5	4	6	2	10	1
11	1	0	1	1	2	3	3	1	1	3	5	5	7	3	11	0
12	1	1	0	0	3	2	2	2	2	0	6	6	4	4	12	1
13	1	1	0	1	3	2	3	2	3	1	6	7	5	5	13	1
14	1	1	1	0	3	3	2	3	2	2	7	6	6	6	14	1
15	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	15	1

Шаг 4. В сохранившихся строках выбираем «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводим их:

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1

2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	2	2	1
3	0	0	1	1	0	1	1	1	1	3	1	1	3	3	3	1
4	0	1	0	0	1	0	0	2	2	0	2	2	0	4	4	0
5	0	1	0	1	1	0	1	2	3	1	2	3	1	5	5	1
6	0	1	1	0	1	1	0	3	2	2	3	2	2	6	6	0
7	0	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	0
8	1	0	0	0	2	2	2	0	0	0	4	4	4	0	8	1
9	1	0	0	1	2	2	3	0	1	1	4	5	5	1	9	0
10	1	0	1	0	2	3	2	1	0	2	5	4	6	2	10	1
11	1	0	1	1	2	3	3	1	1	3	5	5	7	3	11	0
12	1	1	0	0	3	2	2	2	2	0	6	6	4	4	12	1
13	1	1	0	1	3	2	3	2	3	1	6	7	5	5	13	1
14	1	1	1	0	3	3	2	3	2	2	7	6	6	6	14	1
15	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	15	1

Шаг 5. Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркиваем все, кроме одного:

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	2	2	1
3	0	0	1	1	0	1	1	1	1	3	1	1	3	3	3	1
4	0	1	0	0	1	0	0	2	2	0	2	2	0	4	4	0
5	0	1	0	1	1	0	1	2	3	1	2	3	1	5	5	1
6	0	1	1	0	1	1	0	3	2	2	3	2	2	6	6	0
7	0	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	0
8	1	0	0	0	2	2	2	0	0	0	4	4	4	0	8	1
9	1	0	0	1	2	2	3	0	1	1	4	5	5	1	9	0
10	1	0	1	0	2	3	2	1	0	2	5	4	6	2	10	1

11	1	0	1	1	2	3	3	1	1	3	5	5	7	3	11	0
12	1	1	0	0	3	2	2	2	2	0	6	6	4	4	12	1
13	1	1	0	1	3	2	3	2	3	1	6	7	5	5	13	1
14	1	1	1	0	3	3	2	3	2	2	7	6	6	6	14	1
15	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	15	1

Шаг 6. Сокращенная ДНФ имеет вид

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_4} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3} x_4 \vee x_2 \overline{x_3} x_4.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА «Построение полинома Жегалкина»

Определение. ***Арифметические функции*** *в алгебре логики это сложение по модулю два и умножение (конъюнкция).*

Определение. ***Многочленом Жегалкина*** *называется многочлен, являющийся суммой константы 0 или 1 и различных одночленов, в которые все переменные входят не выше, чем в первой степени:* $\sum X_{t_1} ... X_{i_k} + a_j$*, причем на каждом наборе <i_1, ..., i_k> все* a_{ij} *(j = 1, ..., k) различны,* $a_j \in \{0, 1\}$*.*

Теорема. Всякую булеву функцию можно представить единственным полиномом Жегалкина.

Многочлен Жегалкина можно получить различными способами. Остановимся на рассмотрении построения многочлена Жегалкина с помощью треугольника Паскаля. Рассмотрим алгоритм на примере.

Пример.

Построить многочлен Жегалкина для функции *f=10011110*.

Решение.

Алгоритм построения многочлена Жегалкина:

Шаг 1. Строим таблицу (табл. 57). Первый столбец содержит возможные слагаемые полинома Жегалкина. Нулевому набору всегда соответствует слагаемое 1. Остальным наборам соответствует слагаемое, представляющее собой конъюнкцию переменных, которые на данном наборе принимают значение 1. Следующие *n* столбцов – всевозможные наборы из 0 и 1, соответствующие переменным. Далее столбец значений функции f. Функция g является вспомогательной, поэтому изначально этот столбец не заполнен.

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	*Треугольник Паскаля*
1	*0*	*0*	*0*	*1*		
x_3	*0*	*0*	*1*	*0*		
x_2	*0*	*1*	*0*	*0*		
x_2x_3	*0*	*1*	*1*	*1*		
x_1	*1*	*0*	*0*	*1*		
$x_1\ x_3$	*1*	*0*	*1*	*1*		
$x_1\ x_2$	*1*	*1*	*0*	*1*		
$x_1\ x_2\ x_3$	*1*	*1*	*1*	*0*		

Шаг 2. Построение треугольника Паскаля. Верхняя сторона треугольника есть функция f. Любой другой элемент треугольника есть сумма по модулю два двух соседних элементов предыдущей строки. Левая сторона треугольника представляет собой значение вспомогательной функции g.

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	*Треугольник Паскаля*
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*f = 1 0 0 1 1 1 1 0*
x_3	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1 0 1 0 0 0 1*
x_2	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1 1 1 0 0 1*
x_2x_3	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0 0 1 0 1*
x_1	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0 1 1 1*
$x_1\ x_3$	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1 0 0*
$x_1\ x_2$	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1 0*
$x_1\ x_2\ x_3$	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*

Шаг 3. Построение полинома Жегалкина. В полином войдут только те слагаемые, которым соответствует единица во вспомогательной функции g.

Для данной функции многочлен Жегалкина имеет вид:

$$f = 1 + x_3 + x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА «Определение класса функций»

Теорема Поста о функциональной полноте

Теорема Поста (признак полноты системы булевых функций). Для того чтобы система булевых функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$ *была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из пяти функционально замкнутых классов* T_0, T_1, L, M, S *нашлась хотя бы одна функция* f_i *из системы, не принадлежащая этому классу.*

Пример.

Выяснить к каким функционально замкнутым классам принадлежит булева функция *f=01001110*, используя теорему Поста.

Решение.

Строим таблицу значений и треугольник Паскаля:

Слагаемые полинома Жегалкина	x_1	x_2	x_3	f	g	*Треугольник Паскаля*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*f = 0 1 0 0 1 1 1 0*
x_3	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1 1 0 1 0 0 1*
x_2	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0 1 1 1 0 1*
x_2x_3	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1 0 0 1 1*
x_1	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1 0 1 0*
$x_1 x_3$	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1 1 1*
$x_1 x_2$	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0 0*
$x_1 x_2 x_3$	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*

Полином Жегалкина имеет вид: $f = x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_1 x_3$.

1. $f(0, 0, 0) = 0 \Rightarrow f \in T_0$;
2. $f(1, 1, 1) = 1 \Rightarrow f \notin T_1$;
3. $f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1)$, а наборы $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$ являются противоположными, то $f \notin S$;
4. так как в полиноме Жегалкина присутствуют слагаемые, представляющие собой конъюнкцию нескольких переменных, то $f \notin L$;

5. сокращенная ДНФ функции имеет вид: $f = x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3$, так как она содержит отрицания, то $f \notin M$.

Сведем полученные данные:

	T_0	T_1	S	L	M
f	+	-	-	-	-

Пример.

Доказать полноту системы $\{+, \vee, 1\}$.

Решение.

Введем обозначения: $f_1 = x_1 + x_2$, $f_2 = x_1 \vee x_2$, $f_3 = 1$. Построим единую таблицу для функций.

Слагаемые	*№*	x_1	x_2	$f_1 = x_1+x_2$	*Δ Паскаля*	$f_2 = x_1 \vee x_2$	*Δ Паскаля*	$f_3 = 1$	*Δ Паскаля*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0 1 1 0*	*0*	*0 1 1 1*	*1*	*1 1 1 1*
x_2	*1*	*0*	*1*	*1*	*1 0 1*	*1*	*1 0 0*	*1*	*0 0 0*
x_1	*2*	*1*	*0*	*1*	*1 1*	*1*	*1 0*	*1*	*0 0*
x_1x_2	*3*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*

Полином Жегалкина:

$f_1 = x_1 + x_2;$

$f_2 = x_2 + x_1 + x_1x_2;$

$f_3 = 1.$

f	T_0	T_1	L	M	S
f_1	+	-	+	-	-
f_2	+	+	-	+	-
f_3	-	+	+	+	-

Поскольку для каждого из пяти функционально замкнутых классов нашлась функция, не принадлежащая этому классу (в каждом столбце имеется хотя бы один минус), то система булевых функций $\{+, \vee, 1\}$ является полной.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основные источники:

1. Дискретная математика: Сборник задач с алгоритмами решений: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования /М. С. Спирина, П. А. Спирин. - М.: Издательский центр «Академия», 2017.
2. Дискретная математика: учебник / А. И. Гусева, В. С. Киреев, А. Н. Тихомирова. – М.: КУРС: ИНФА-М, 2018.
3. Дискретная математика: сборник задач / А. И. Гусева, В. С. Киреев, А. Н. Тихомирова. – М.: КУРС: ИНФА-М, 2018.