МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

АРХАНГЕЛЬСКОЙ ОБЛАСТИ

МИРНИНСКИЙ

ПРОМЫШЛЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

По выполнению контрольных работ по дисциплине

«ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

(для студентов – заочников по специальности 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы»)

Составила преподаватель ПИВОВОРОВА Т.В.

Методические указания к выполнению контрольных работ по элементам высшей математики для студентов-заочников.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебная дисциплина «Элементы высшей математики» является частью основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности СПО базовой подготовки специальности 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы». Данная дисциплина входит в математический и общий естественнонаучный цикл. Знания, полученные по данной дисциплине, используются в элементах математической логики, теории вероятностей и математической статистике, математических методах, информатике и современных информационных технологиях, в проведении исследовательских работ.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен уметь**:**

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления функции одной и нескольких переменных,

- решать дифференциальные уравнения;

- применять математические методы при решении типовых профессиональных задач.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен знать**:**

- основы математического анализа,

- линейной алгебры и аналитической геометрии;

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Количество часов на освоение программы учебной дисциплины:

- Максимальная учебная нагрузка – 181 час, в том числе:
- Обязательная аудиторная нагрузка – 22 часа
- Самостоятельная работа обучающегося – 159 часов.

Цель данного методического пособия – оказать помощь студентам-заочникам специальности 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы» в изучении учебной дисциплины «Элементы высшей математики».

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом. В наше время, казалось бы, найти нужную литературу не составляет труда, но на самом деле, это очень сложный процесс, который занимает огромное количество времени. Поэтому данное методическое пособие перед каждой контрольной работой содержит краткий курс лекций и примеры решения заданий. Контрольные работы позволяют закрепить теоретический материал курса. В процессе обучения студент должен выполнить 2 контрольные работы. Решение задач контрольных работ является проверкой степени усвоения студентом теоретического курса, а рецензии на работу помогают ему доработать и правильно освоить различные разделы курса высшей математики. Перед выполнением контрольной работы необходимо ознакомиться с теорией и примерами решения заданий по данной контрольной работе, а также со справочными материалами, приведёнными в конце методических указаний. Темы контрольных работ для специальности 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы», учебным планом которой предусмотрено по курсу дисциплины «Элементы высшей математики» 2 контрольные работы, распределены следующим образом:

1 **контрольная работа** – Раздел 1. Элементы линейной алгебры (Тема 1.1. Матрицы и определители; Тема 1.2. Системы линейных уравнений; Раздел 2. Элементы аналитической геометрии (Тема 2.1. Векторы; Тема 2.2. Прямые. Кривые второго порядка)

2 **контрольная работа** – Раздел 3. Основы математического анализа (Тема 3.1. Теория пределов; Тема 3.2. Дифференциальное исчисление

функции одной переменной; Тема 3.3. Интегральное исчисление; Тема 3.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения).

Контрольная работа № 1 содержит 6 заданий, а контрольная работа № 2 – 7 заданий. При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

- указывать на титульном листе наименование дисциплины, тему контрольной работы, фамилию и инициалы студента, группу, фамилию и инициалы преподавателя;
- контрольную работу следует выполнять аккуратно, оставляя поля для замечаний рецензента;
- перед выполнением задания необходимо посередине строки написать «Задание № __», переписать задание, после чего написать посередине строки «Решение» и выполнить задание;
- решение заданий должно обязательно сопровождаться подробными пояснениями и формулами;
- для пояснения решения задачи там, где необходимо (например, в разделе 2 Элементы аналитической геометрии), аккуратно сделать чертёж;
- в контрольной работе следует указать учебники и учебные пособия, которые использовались при решении заданий.

Контрольные работы, выполненные без соблюдения указанных правил, а также выполненные не по своему варианту не рассматриваются.

ЛЕКЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Тема 1.1. Матрицы и определители

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из чисел или иных математических выражений a_{ij} (называемых элементами матрицы):

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей *n*-го порядка называется матрица размера $n\times n$, например, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & y & -4 \\ 0 & 2x & 4 \end{pmatrix}$ – квадратная размера 3×3.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т. е. с индексами $i\neq j$) равны 0, например, $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$.

Единичной (обозначается *E*) называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали, например, $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны 0, например, $K=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§1. *Операции над матрицами.*

Суммой матриц $A=(a_{ij})$ *и* $B=(b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера , причём $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$на число λ называется матрица $B=(b_{ij})$ того же размера, что и матрица *A,* причём $b_{ij}=\lambda\, a_{ij}$.

Произведением матриц $A\cdot B$ (размеров $m\times n$ и $n\times r$ соответственно) называется матрица *C* размера $m\times r$, такая, что $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{ki}$.

Произведение матриц A·B существует, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пример № 1. Найти произведение матриц A·B и B·A(если это возможно),если A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, поэтому произведение A·B существует. Найдём это произведение:

A·B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \left[\begin{matrix} 1 \text{ *строка матрицы Априкладывается*} \\ \text{*к первому столбцу матрицы B,*} \\ \text{*соответствующие элементы перемножаются,*} \\ \text{*а произведения складываются.*} \end{matrix}\right] =$

$\begin{pmatrix} 1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7 & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8 \\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Произведение B·A не существует, т. к. число столбцов матрицы B(3) не совпадает с числом строк матрицы A (2).

Коммутирующими (или перестановочными) называются матрицы A и B, для которых AB=BA.

Транспонированной к матрице A=(a_{ij}) называется матрица $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (\mathrm{a}_{ij}^{T})$, такая, что $\mathrm{a}_{ij}^{T} = \mathrm{a}_{ji}, \forall i, j$ (т. е. все строки которой равны соответствующим столбцам матрицы A).

Пример № 2.Транспонировать матрицу $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Записывая первую и вторую строки матрицы A как первый и, соответственно, второй столбец матрицы A^{T}, получим матрицу $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Задание № 1(пример).</u>*Найти значение матричного многочлена f(A), если* $f(x) = -2x^2 + 5x + 9, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> $f(A) = -2A^2 + 5A + 9E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

1) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2) $-2A^2 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$.

3) $5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$.

4) $9E = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

5) $f(A) = \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -14 + 5 + 9 & -4 + 10 + 0 \\ -6 + 15 + 0 & -12 + 0 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответ. $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$.

Элемент строки матрицы называется *крайним*, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю. Матрица называется *ступенчатой*, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

Например, $A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & 3 \end{pmatrix}$ – не ступенчатая, $B = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – ступенчатая. В каждой из матриц подчёркнуты крайние элементы каждой строки.

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие операции:

1) Перемена местами двух строк (столбцов).
2) Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
3) Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица В. полученная из матрицы А с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* матрице А (обозначается В~А).

Пример № 3. Привести к ступенчатому виду матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований над строками.

Решение.

1) Сделаем нулевыми все элементы матрицы под крайним элементом первой строки. Для этого вычтем из второй строки первую, умноженную на 3, и запишем результат во вторую строку. А к третьей строке прибавим первую, умноженную на 5, и запишем результат в третью строку.
2) Теперь сделаем равными нулю все элементы матрицы под крайним элементом второй строки. Для этого умножим вторую строку на 3. Третью строку – на 2. Полученный результат сложим и запишем в третью строку. Это будем записывать так:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - 3 \cdot I \\ III + 5 \cdot I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2 \cdot III + 3 \cdot II \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$ – ступенчатая матрица.

§2. *Определители.*

Любой квадратной матрице n-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можно поставить в соответствие выражение, которое называется *определителем (детерминантом)* матрицы A, и обозначается так: $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ или $|A|$ или *det* A.

<u>*Вычисление определителей*</u>. Определитель матрицы *A* размера *2*х*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

<u>Задание №2 (пример).</u> Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

<u>Решение.</u> При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$ а

затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Запишем это так: *det* A=$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} — 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1 \cdot 0 - 2 \cdot 5) + 3(4 \cdot 0 - 2 \cdot 3) - 1 \cdot \left(4 \cdot 5 — 1\right) \cdot 3 = 2 \cdot (-10) + 3 \cdot (-6) - 1 \cdot (20 + 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$

<u>Ответ.</u> Det A= –61.

§3. *Ранг матрицы.*

Минором k-го порядка произвольной матрицы А называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

В матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ можно указать, например, такие миноры:

- 2-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$;
- 3-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix}$;
- 1-го порядка $|2|, |3|, |-7|$.

Рангом матрицы А называется наибольший из порядков её миноров, не равных нулю. Обозначается *r(A), rang(A).*

Теорема 1. 1. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Теорема 1. 2. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству её ненулевых строк.

<u>*Метод элементарных преобразований* нахождения ранга матрицы заключается в том, что матрицу А приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы А</u> .

Пример № 4. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведём матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot II - I \\ 2 \cdot III - I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix}_{III + 3 \cdot II} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит её ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы равен 2.

Rang A=2.

§4. *Обратная матрица. Матричные уравнения.*

Обратной матрицей к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$.

Замечание. Если матрица A^{-1} существует, то она единственна.

Присоединённой матрицей к квадратной матрице $A=(a_{ij})$ называется матрица $\widetilde{A}=(A_{ij})^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij}.

Теорема 1. 3. Если квадратная матрица A – невырожденная (т. е. det A≠0), то $A^{-1}=\frac{1}{det\,A}\cdot\widetilde{A}$.

Метод присоединённой матрицы вычисления обратной матрицы к невырожденной матрице *A* состоит в применении теоремы 1. 3.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ называется произведение $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы *A* называется минор, составленный из элементов *A*, оставшихся после вычёркивания i-строки и j-столбца. Например, в матрице $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$ минором M_{21}является определитель, составленный из элементов матрицы, оставшихся после вычёркивания 2-й строки и 1-го столбца: $M_{21}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 0-3\cdot 8=-24$. Соответственно, алгебраическим дополнением A_{21} будет число $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^3\cdot -24=24$.

Матричные уравнения простейшего вида и их решения с неизвестной матрицей *X* и их решения записываются следующим образом:

$$AX = B, \quad \text{решение}: X = A^{-1}B;$$

$$XA = B, \quad \text{решение}: X = BA^{-1};$$

$$AXC = B, \quad \text{решение}: X = A^{-1}BC^{-1}.$$

Пример № 5. Найти методом присоединённой матрицы матрицу, обратную к данной: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) Найдём det A:

   $\det \mathrm{A} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -48 - 2(-42) + 3(32 - 35) = -48 + 84 - 9 = 27 \neq 0.$

   Так как det A≠0, то A^{-1} существует.

2) Найдём алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48;$$

$$\mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) = 42;$$

$$\mathrm{A}_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3;$$

$$\mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24;$$

$$\mathrm{A}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21;$$

$$\mathrm{A}_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6;$$

$$\mathrm{A}_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\mathrm{A}_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$\mathrm{A}_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

3) Запишем матрицу $\widetilde{\mathrm{A}} = \left(\mathrm{A}_{ij}\right)^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

4) Найдём матрицу $А^{-1}$:

$$А^{-1}=\frac{1}{\det А}\cdot\tilde{А}=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

***Тема 1.2. Системы линейных уравнений*.**

§1. Исследование систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\qquad(*)$$

Если система имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения.

Систему (*) можно записать в матричной форме: $AX=B$, где

$А=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$ – *матрица системы*, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ – *столбец неизвестных*, $В=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$ –*столбец свободных членов.*

Матрица $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей системы.*

Теорема 2. 1. (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы: r(A)=r($(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$.

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы – выяснить, определена она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если *r(A)<r(A|B)*, то система несовместна.
2) Если *r(A)=r(A|B)=n* (где *n* – число неизвестных), то система совместна и определена.
3) Если *r(A)=r(A|B)<n*, то система совместна и неопределенна.

Исследование систем линейных уравнений методом Гаусса.

Задание №4 (пример).

А) Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 16 \end{cases}$

Решение. Приведём к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right) \begin{matrix} II - I \\ III + 2 \cdot I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) III - 2 \cdot II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как *r(A)=r(A|B)=2, n=3 ,согласно п. 3 (r(A)=r(A|B)<n)система совместна и неопределенна* (т. е. имеет бесконечно много решений). Найдём общее решение системы и одно из частных решений системы. Количество главных переменных равно *r(A)=2,* количество свободных переменных равно *n– r(A)=3–2=1.* Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы А, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы – 1-й и 2-й столбцы матрицы А – соответствуют переменным x_1 *и* x_2 – это будут *главные переменные*, а x_3 – *свободная переменная*. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ \quad x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Теперь для наглядности запишем эту систему в другом виде (слева остаются только главные переменные): $\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 4 \\ \quad x_2 = 2x_3 + 4. \end{cases}$

Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим $x_1=-x_3-8$. Обозначая свободную переменную x_3 через t, получим *общее решение системы:* $(-t-8; 2t+4; t)$. *Частное решение системы* получим, например, при $t=0$: $(-8; 4; 0)$.

Ответ. Система совместна и неопределенна; общее решение $\left(-t-8; 2t+4; t\right)$; частное решение $(-8; 4; 0)$.

Б) Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-4 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \\ -2x_1-2x_3=3 \end{cases}$

Решение. Приведём к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} II-I \\ III+2\cdot I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) III-2\cdot II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right).$$

Так как $r(A)=2$, а $r(A|B)=3$, то согласно п. 1($r(A)<r(A|B)$) система несовместна.

Ответ. Система несовместна.

В) Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3=2 \\ x_1-2x_2+4x_3=3 \end{cases}$.

Решение. Приведём к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) I \leftrightarrow III \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} I\cdot(-3)+II \\ I\cdot(-2)+III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) III \div (-5) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Так как $r(A)=r(A|B)=3$, $n=3$ *,согласно п. 2 ($r(A)=r(A|B)=n$)система совместна и определена.* Найдём решение системы. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице: $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=3 \\ 5x_2-7x_3=-7 \\ x_3=1 \end{cases}$.

Решим эту систему: $\begin{cases} x_1=2x_2-4\cdot 1+3 \\ 5x_2=7\cdot 1-7=0 \\ x_3=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=2\cdot 0-4\cdot 1+3=-1 \\ x_2=0 \\ x_3=1 \end{cases}$.

Ответ. Система совместна и определена; общее решение (–1;0;1); частное решение (–1;0;1).

§2. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы и по методу Крамера.

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными задана в матричной форме: $AX=B$, где $A=(a_{ij})$ – матрица коэффициентов системы размера $n\times n$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Если D – определитель матрицы A – не равен нулю, то система совместна и определена, её решение задаётся формулой: $X = A^{-1}\cdot B$. Другую форму записи этого утверждения дают *формулы Крамера:*

$x_k = \frac{D_k}{D}$, k=1, 2, …, n, где D_k – определитель, получающийся из D заменой k-го столбца на столбец свободных членов.

Задание №3 (пример). Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=9, \\ 7x_1+8x_2=-6. \end{cases}$

Решение.

а) Решим систему по формулам Крамера. Для этого найдём определитель матрицы системы: $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}=27$. Так как $D\neq 0$, то система совместна и определена. Найдём определители D_1, D_2, D_3 подставляя столбец свободных членов $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ вместо первого, второго и третьего столбцов определителя D соответственно:

$$D_1=\begin{vmatrix}6&2&3\\9&5&6\\-6&8&0\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix}5&6\\8&0\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}9&6\\-6&0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}9&5\\-6&8\end{vmatrix}=6\cdot(-48)-2\cdot36+$$

$$+3(72+30)=-54,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&6&3\\4&9&6\\7&-6&0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}9&6\\-6&0\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&0\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&9\\7&-6\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot36-6\cdot(-42)+3\cdot(-24-63)=27,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&2&6\\4&5&9\\7&8&-6\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5&9\\8&-6\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&9\\7&-6\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-30-72)-2(-24-63)+6\cdot(32-35)=54.$$

Отсюда получаем решение системы уравнений:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-54}{27}=-2$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{27}{27}=1$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{54}{27}=2$$

Ответ. (–2; 1; 2).

Б) Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдём матрицу A^{-1}, обратную к матрице системы $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}$. Эта матрица найдена в примере № 5: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\\frac{14}{9}&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}$. Найдём решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\\frac{14}{9}&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\9\\-6\end{pmatrix}=$$

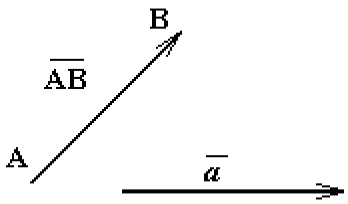
$$=\begin{pmatrix} -\frac{16}{9}\cdot 6+\frac{8}{9}\cdot 9-\frac{1}{9}\cdot(-6) \\ \frac{14}{9}\cdot 6-\frac{7}{9}\cdot 9+\frac{2}{9}\cdot(-6) \\ -\frac{1}{9}\cdot 6+\frac{2}{9}\cdot 9-\frac{1}{9}\cdot(-6) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{18}{9} \\ \frac{9}{9} \\ \frac{18}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Ответ.</u> $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии.

Тема 2.1. Векторы

Направленный отрезок (или упорядоченная пара точек) называется *вектором*.



Вектор обычно обозначается символом $\overrightarrow{AB}$, где A – начало, а B – конец направленного отрезка, либо одной буквой $\vec{a}$

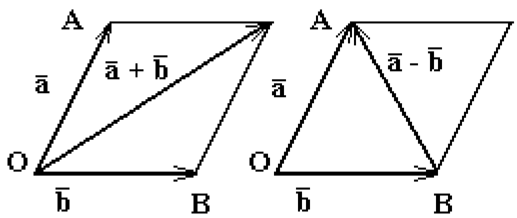


Рис 1.Сложение векторов

<u>*Определение*</u> *Суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой третий вектор $\vec{c}$, что при совмещенных началах этих трех векторов, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ служат сторонами параллелограмма, а вектор $\vec{c}$ – его диагональю (рис.1). Сложение векторов в соответствии с рисунком называется *сложением по правилу параллелограмма*

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

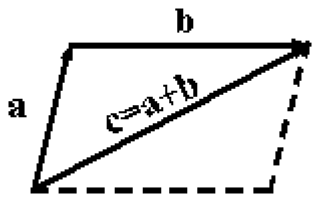


Рис2.Правило треугольника

Однако бывает более удобным использовать для сложения *правило треугольника*, которое становится ясным из рисунка 2. Из того же рисунка видно, что результаты сложения по правилу параллелограмма и по правилу треугольника одинаковы.

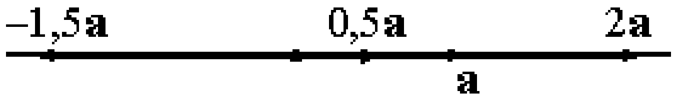


Рис.3Умножение вектора на число

<u>*Определение*</u> *Произведением вектора $\vec{a}$ на вещественное число* α называется вектор $\vec{b}$, определяемый условием

1) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$ и, если $|\vec{b}| \neq 0$, то еще двумя условиями:

2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3) векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$направлены одинаково, если α >0, и противоположно, если α<0.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число αобозначается $\alpha\vec{a}$(рис 3).

Тема 2.2. Прямые. Кривые второго порядка.

§1. *Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой.*

Каждая прямая на плоскости определяется *линейным уравнением первой степени с двумя неизвестными.*

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом:*

   $y = kx + b,$ где

   k – угловой коэффициент прямой (т. е. тангенс угла α, который прямая образует с положительным направлением оси OX, k=$tg\alpha$), b – ордината точки пересечения прямой с осью OY.

2. *Общее уравнение прямой*:

   $Ax + By + C = 0,$ где

   A, B и C – постоянные коэффициенты, причём A и B одновременно не обращаются в нуль ($A^2+B^2 \neq 0$).

   Частные случаи этого уравнения:

   a. *Ax+By=0 (C=0)* – прямая проходит через начало координат;
   b. *Ax+C=0 (B=0)* – прямая параллельна оси OY;
   c. *By+C=0 (A=0)* – прямая параллельна оси OX;

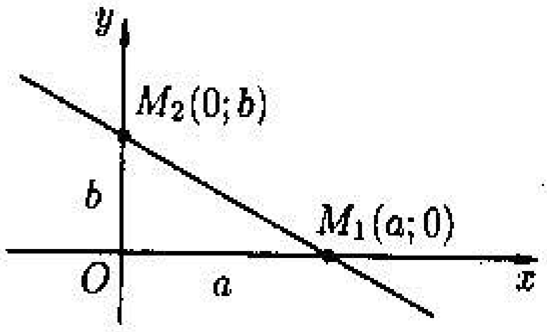
d. *Ax=0 (B=C=0)* – прямая совпадает с осью OY;

e. *By=0 (A=C=0)* – прямая совпадает с осью OX.

3. *Уравнение прямой в отрезках:*

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где

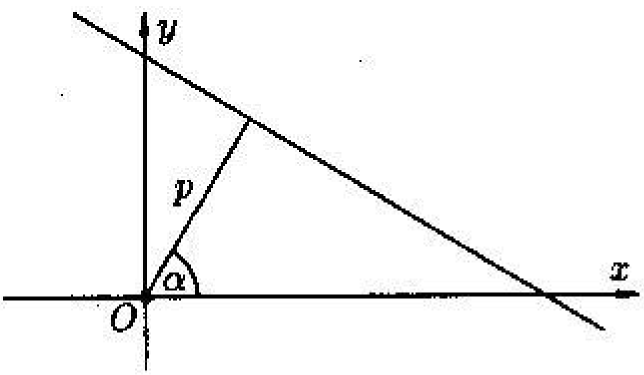
a *и* b – длины отрезков (с учётом знаков), отсекаемых прямой на осях OX и OY соответственно.



4. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении:* $y-y_0=k(x-x_0)$, где $k=tg\alpha$ (α – угол, образуемый прямой с осью OX); $(x_0; y_0)$ – координаты данной точки.

5. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, где $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$* имеет вид: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

6. *Нормальное уравнение прямой*: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, где p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α – угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси OX



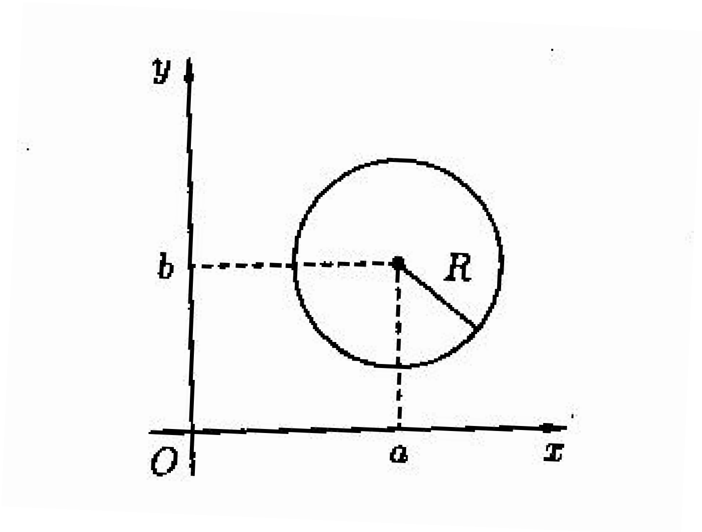
Общее уравнение прямой можно преобразовать в нормальное путём умножения на *нормирующий множитель* $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$; знак перед дробью берётся противоположным знаку свободного члена C (в общем уравнении прямой).

Задание № 5 (пример). Уравнение $4x - 3y + 12 = 0$ представить в различных видах (с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения).

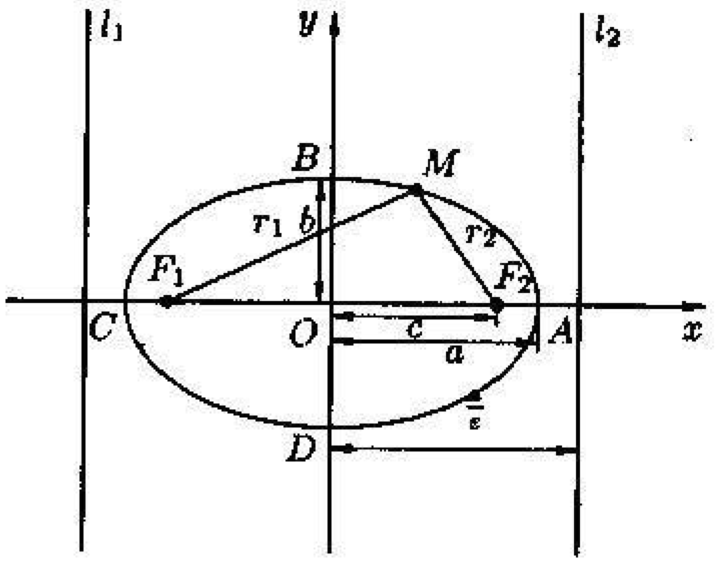
Решение. Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом решим заданное уравнение относительно у. Получим $3y = 4x + 12,$ тогда $y = \frac{4}{3}x + 4$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом; здесь $k = \frac{4}{3}, b = 4.$ Для получения уравнения прямой в отрезках перенесём свободный член C=12 вправо и разделим обе части уравнения на $-$ 12. В результате получим: $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$ – уравнение в отрезках на осях; здесь a= $-3, b = 4.$ Приведём исходное уравнение к нормальному виду. Для этого умножим обе части уравнения $4x - 3y + 12 = 0$ на нормирующий множитель $\lambda = \frac{1}{-\sqrt{4^2+(-3)^2}} = -\frac{1}{5}$. Перед корнем взят знак «минус», т. к. свободный член (C=12) имеет знак «плюс». Получим $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0.$ Здесь $\cos\alpha = -\frac{4}{5}, \sin\alpha = \frac{3}{5}, p = \frac{12}{5}$, т. е. расстояние от O(0;0) до прямой равно 2,4.

§2. *Кривые второго порядка.*

1. *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, удалённых от заданной точки A на одно и тоже расстояние R. Точка A называется *центром*, а R – радиусом окружности.
   В прямоугольной системе координат уравнение окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, где $(a;b)$ – координаты её центра. Если $a=0, b=0,$ то центр окружности совпадает с началом координат и уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.



2. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами. *Каноническое уравнение эллипса:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где a – *большая полуось,* b – *малая полуось* эллипса. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$; $F_2(c;0)$, где c –



половина расстояния между фокусами. Числа a,b и c связаны соотношением $c^2=a^2-b^2$. Точки A, B, C, D называют вершинами эллипса, точка O – *центром* эллипса, расстояния r_1 *и* r_2 от произвольной точки M эллипса до его фокусов называют *фокальными радиусами* этой точки.

Эксцентриситетом ε эллипса называется отношение фокусного расстояния *2c* (расстояния между фокусами) к большой оси *2a:*

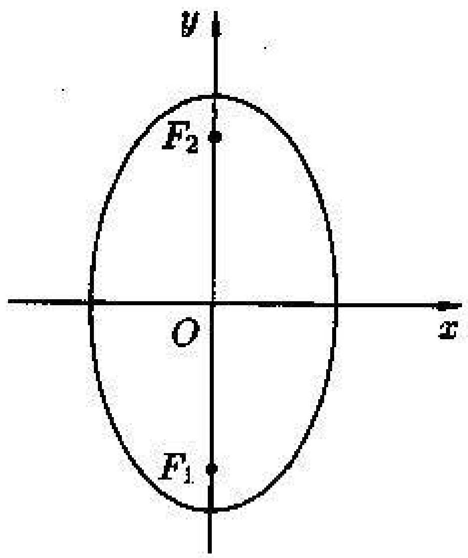
$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon < 1, \text{т. к.}\, c < a).$$

Фокальные радиусы определяются формулами: $r_1 = a + \varepsilon x,\ \ r_2 = a - \varepsilon x, \quad (r_1 + r_2 = 2a).$

Директрисами эллипса называются прямые l_1 и l_2 параллельные малой оси эллипса и отстоящие от неё на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$; *уравнения директрис*: $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$.

<u>*Замечания.*</u>

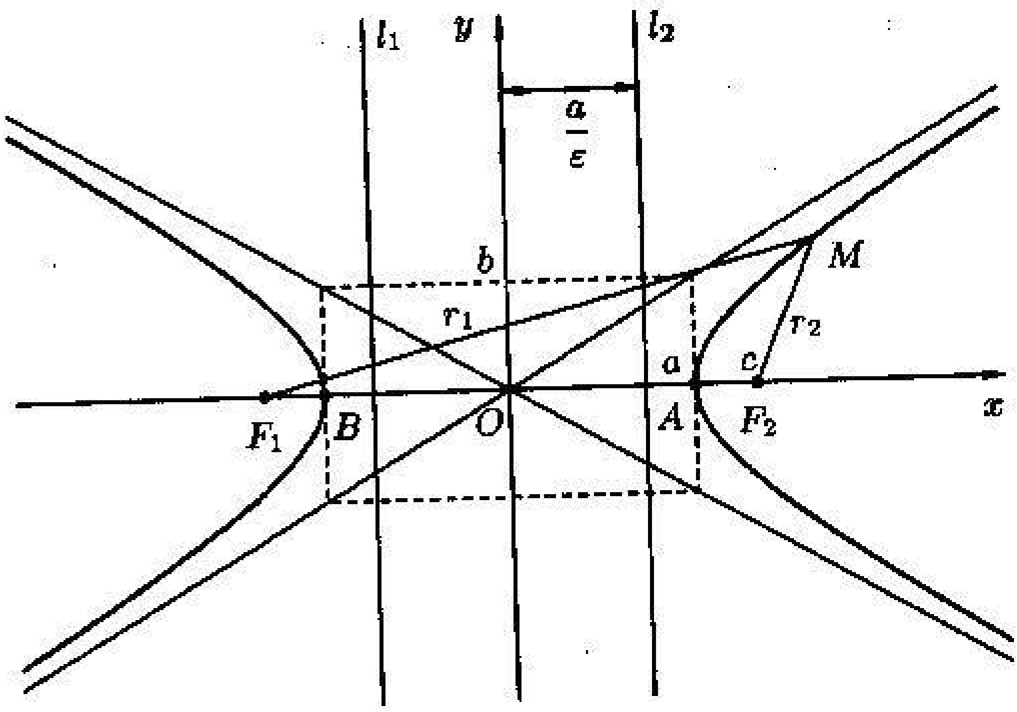
1) Если a=b, то каноническое уравнение эллипса определяет окружность $x^2 + y^2 = a^2$;
2) если фокусы эллипса лежат на оси Oy, то эллипс имеет вид, изображенный на рисунке:



   В этом случае: $b > a,\ c^2 = b^2 - a^2,\ \varepsilon = \frac{c}{b}$, уравнения директрис $y = \mp\frac{b}{\varepsilon}$;
3) уравнения эллипса с осями, параллельными координатным, имеет вид: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$; где ($x_0$; y_0) – координаты центра эллипса.

3. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a – *действительная,* b – *мнимая полуось* гиперболы.



Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, c – половина расстояния между фокусами. Числа a, b и c связаны соотношением $c^2 = a^2 + b^2$. Точки A и B называются *вершинами* гиперболы, точка O – *центром* гиперболы, расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M гиперболы до её фокусов называются *фокальными радиусами* этой точки.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $(\varepsilon > 1, \text{т. к.}\, c > a)$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Фокальные радиусы определяются формулами: для точек правой ветви гиперболы: $r_1 = a + \varepsilon x,\ r_2 = -a + \varepsilon x$;

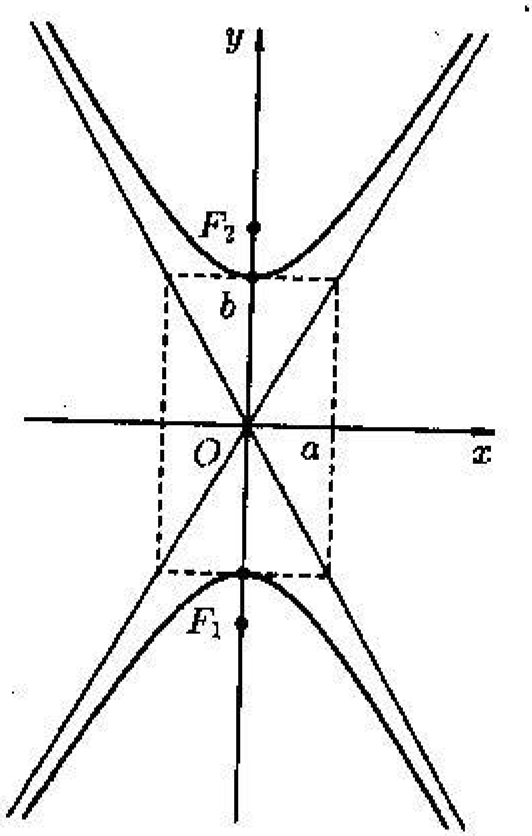
для точек левой ветви: $r_1 = -a - \varepsilon x,\ r_2 = a - \varepsilon x.$

Прямоугольник, центр которого совпадает с точкой O, а стороны равны и параллельны осям гиперболы называется *основным прямоугольником гиперболы.* Диагонали основного прямоугольника гиперболы лежат на двух прямых, называемых *асимптотами* гиперболы; они определяются уравнениями: $y = \pm\frac{b}{a}x.$

Две прямые l_1 и l_2, параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от неё на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами гиперболы.* Их уравнения $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$.

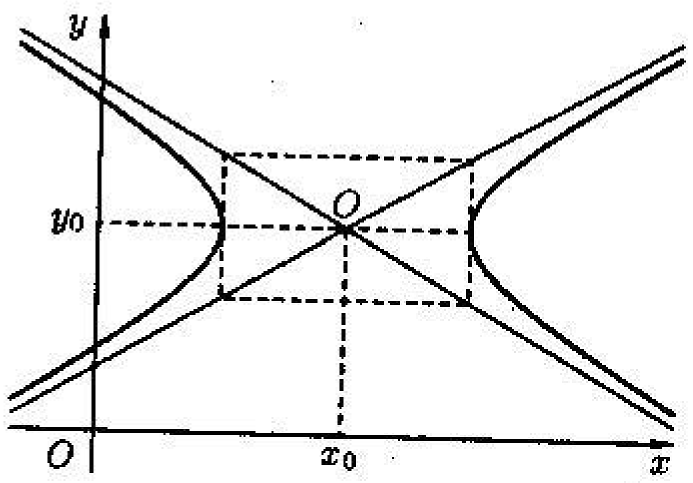
Замечания.

1) Если $a=b$, то гипербола называется равносторонней (равнобочной). Её уравнение имеет вид
   $x^2 - y^2 = a^2.$
2) Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то уравнение гиперболы



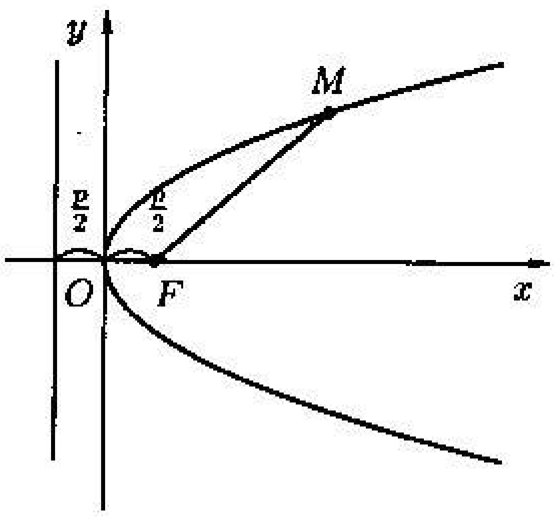
имеет вид $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Эксцентриситет этой гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{b}$, асимптоты определяются уравнениями $y = \pm\frac{b}{a}x$, а уравнения директрис $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

3) Уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным, имеет вид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, где *($x_0$;$y_0$)* – координаты центра гиперболы.



4. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки. Называемой *фокусом*, и заданной прямой, называемой *директрисой*.

   Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, где число *p>0*, равное расстоянию от фокуса *F* до директрисы *l*, называется параметром параболы. Координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Точка O(0; 0) называется



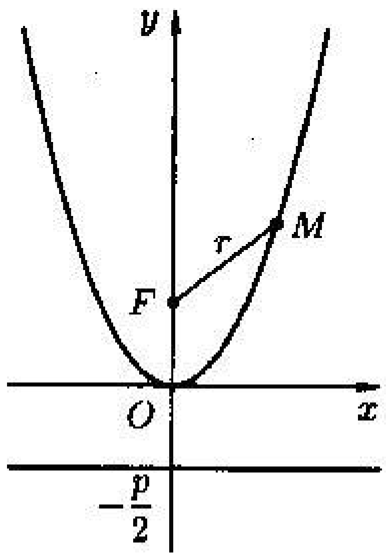
вершиной параболы, длина *r* отрезка *FM* – *фокальный радиус точки M,* ось OX – *ось симметрии* параболы.

Уравнение директрисы параболы имеет вид: $x = -\frac{p}{2}$;

Фокальный радиус вычисляется по формуле: $r = x + \frac{p}{2}$.

Замечания.

1) Парабола, симметричная относительно оси OY и проходящая через начало координат, имеет уравнение: $x^2 = 2py$.

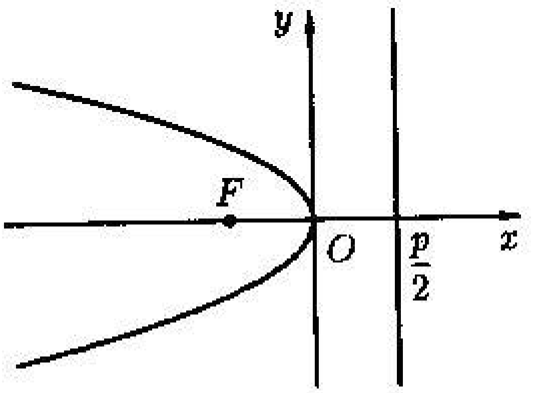


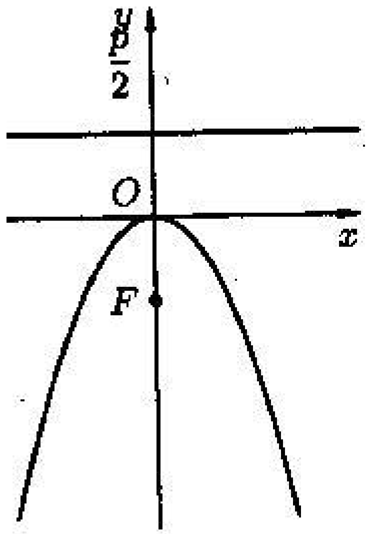
Фокусом параболы является точка $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$.

Уравнение директрисы этой параболы $y = -\frac{p}{2}$.

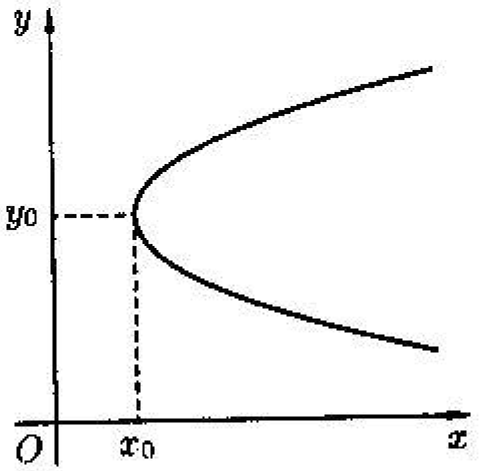
Фокальный радиус точки M параболы $r = y + \frac{p}{2}$.

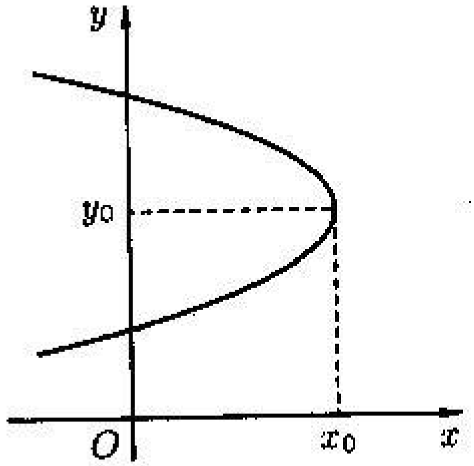
2) Различные параболы и их уравнения.



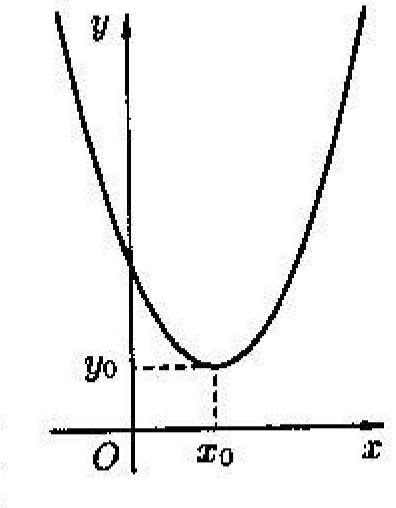


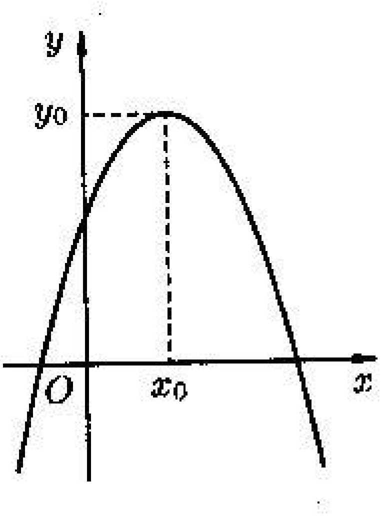
$y^2 = -2px$ $x^2 = -2py$





$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$





$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ $\qquad\qquad$ $(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$

<u>Задание № 6 (пример)</u> Дано уравнение эллипса $24x^2 + 49y^2 = 1176$. Найти:

1) длины его полуосей;
2) координаты фокусов;
3) эксцентриситет эллипса;
4) уравнения директрис и расстояния между ними;
5) точки эллипса, расстояния от которых до левого фокуса F_1 равно 12.

<u>Решение.</u> Запишем уравнение эллипса в виде канонического уравнения, разделив его обе части на 1176. Получим: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$. Сравнивая с общим видом уравнения эллипса($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), видно, что a^2=49, b^2=24, т. е. a=7, b=$2\sqrt{6}$. Используя соотношение $c^2 = a^2 - b^2$, находим c^2=49−24=25, c=5. Следовательно, $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$.

По формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$ находим $\varepsilon = \frac{5}{7}$.

Уравнения директрис имеют вид $x = \pm\frac{7}{\frac{5}{7}}$, т. е. $x = \frac{49}{5}$ и $x = -\frac{49}{5}$; расстояния между ними $d = \frac{49}{5} - \frac{49}{5} = \frac{98}{5}$=19,6.

По формуле $r_1 = a + \varepsilon x$ находим абсциссу точек, расстояния от которых до точки F_1 равно 12: $12=7+\frac{5}{7}x$, т. е. x=7.

Подставляя значение x в уравнение эллипса. Найдём ординаты этих точек: $24 \cdot 49 + 49y^2 = 1176,\ 49y^2 = 0, y = 0$. Условию задачи удовлетворяет точка *A(7;0)*.

Раздел 3. Основы математического анализа.

Тема 3.1. Теория пределов.

Типы неопределенностей и методы их раскрытия

Часто при вычислении пределов какой-либо функции, непосредственное применение теорем о пределах не приводит к желаемой цели. Так, например, нельзя применять теорему о пределе дроби, если ее знаменатель стремится к нулю. Поэтому часто прежде, чем применять эти теоремы, необходимо тождественно преобразовать функцию, предел которой мы ищем. Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей.

1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

Решение: При подстановке вместо переменной *x* числа 5 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия нужно разложить знаменатель на множители: $x^2 - 25 = (x-5) \cdot (x+5)$, получили общий множитель (x-5), на который можно сократить дробь. Заданный предел примет вид: $\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{x+5}$.

Подставив x=5, получим результат: $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Решение: При подстановке вместо переменной x числа 3 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель x-3. В результате получим новый предел, знаменатель которого при подстановке вместо переменной x числа 3 не равен нулю. Этот предел легко вычисляется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

<u>*Пример 3.*</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Решение: При подстановке вместо переменной x числа 0 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и его следствием $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. После чего предел легко вычисляется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

I I. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

<u>*Пример 4.*</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1-8x}{4x+5}$

Решение: При подстановке вместо переменной x бесконечности (∞) видим, что получается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия нужно числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень, в данном случае на x. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-8x}{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{8x}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-8}{4+\frac{5}{x}}=\frac{0-8}{4+0}=\frac{-8}{4}=-2$$, т.к. величины $\frac{1}{x},\frac{5}{x}$ являются бесконечно малыми и их пределы равны 0.

Замечательные пределы:

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Тема 3.2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

1. $(c)'=0,(cu)'=cu';$
2. $x'=1$
3. $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u' \quad (n\in R)$
4. $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
5. $(\frac{1}{u^n})'=-\frac{n}{u^{n+1}}\cdot u'$
6. $(u+v)'=u'+v';$
7. $(uv)'=u'v+v'u;$
8. $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$
9. $(e^u)'=e^u\cdot u'$
10. $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$
12. $(\log_a u)'=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
13. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
14. $(\cos u)'=\sin u\cdot u'$
15. $(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
16. $(ctgu)'=\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
17. $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
18. $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
19. $(arctgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

11. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

20. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Правила вычисления производной.

1. $(cu)' = c \cdot u'$, т. е. постоянный множитель можно вынести за знак производной.
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, т. е. производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных.
3. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Общая схема исследования функции и построение её графика.

1. Найдите область определения функции.
2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.
3. Найдите промежутки знакопостоянства.
4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.
5. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки перегиба.
6. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Постройте график функции, используя полученные результаты исследования.

Построить график функции: $y = x \cdot e^x$

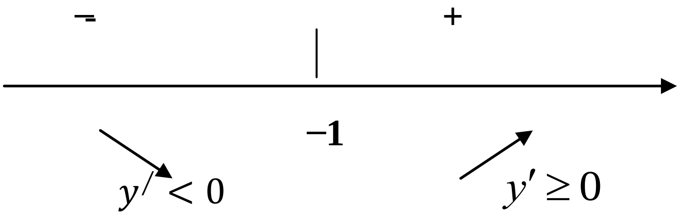
2. D(y) = R
3. Функция не является четной и нечетной.
4. y = 0 при x = 0. Два промежутка знакопостоянства $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$

   для $x \in (-\infty;0) \Rightarrow y < 0$; для $x \in (0;+\infty) \Rightarrow y > 0$

5. Найдем производную данной функции:

$y' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x)$

$y' = 0$ при x = -1. Эта точка делит область определения функции на два промежутка $(-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$

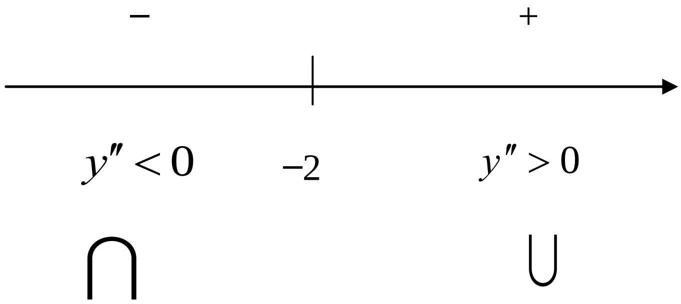


Исследуемая функция на промежутке $(-\infty;-1)$ убывает, а на промежутке $(-1;+\infty)$ возрастает. Точка x = -1 – точка минимума $y_{\min}(-1) = -\frac{1}{e}$

6. Найдем вторую производную данной функции:

$y'' = (e^x)' \cdot (1 + x) + e^x \cdot (1 + x)' = e^x \cdot (1 + x) + e^x = e^x \cdot (2 + x)$

$y'' = 0$ при x = -2

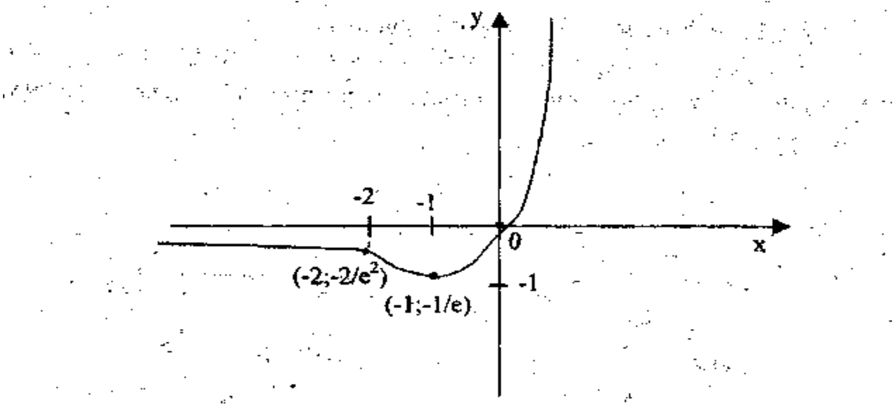


для $x \in (-\infty;-2) \Rightarrow y'' < 0$, следовательно, график функции на этом интервале выпуклый вверх.

для $x \in (-2;+\infty) \Rightarrow y'' > 0$ следовательно, график функции на данном интервале выпуклый Вниз.

X = -2 – точка перегиба, $y_{пер}(-2) = -2 \cdot e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$

7. По полученным данным строим график



Тема 3.3. Интегральное исчисление.

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctgx + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int tgxdx = \ln\|\cos x\| + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int ctgxdx = \ln\|\sin x\| + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin xdx = -\cos xdx$	10. $\int e^x dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos xdx = \sin xdx$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	12. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$	

Свойства неопределённого интеграла.

1. $\int dF(x) = F(x) + C$;
2. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx,\ \alpha \neq 0$ – т. е. постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла.
3. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, т. е. неопределённый интеграл от суммы функций равен сумме неопределённых интегралов от этих функций.

4. Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$ где $a \neq 0.$

Неопределённый интеграл. Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример : Вычислите $\int (x^3 - 3x + \sin x)dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла, а затем применим 1 и 4 табличные интегралы:

$$\int (x^3 - 3x + \sin x)dx = \int x^3 dx - 3 \cdot \int x dx + \int \sin x dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - \cos x + C =$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \cdot x^2 - \cos x + C$$

Пример : Вычислите $\int \frac{3 + 2x - x^2}{x} dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы

$$\int \frac{3+2x-x^2}{x}dx = \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{2x}{x}dx - \int \frac{x^2}{x}dx = 3 \cdot \int \frac{dx}{x} + 2 \cdot \int dx - \int x dx = 3\ln x + 2x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + c$$

Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Пример : Вычислите $\int (3x-4)^3 dx$

Решение: Введем новую переменную $t = 3x\text{-}4$, тогда $dt = t' \cdot dx = (3x-4)' \cdot dx = 3dx$, откуда $dx = \frac{dt}{3}$. Подставим новую переменную в интеграл

(вместо выражения *3x-4* подставим *t*, вместо dx подставим $\frac{dt}{3}$).

$$\int (3x-4)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{dt}{3} = \frac{t^4}{12} + C$$

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо *t* подставим выражение *3x-4*), получим окончательный ответ.

$$\int (3x-4)^3 dx = \frac{(3x-4)^4}{12} + C$$

Интегрирование по частям (метод стрелок)

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx$$

$\int$ ‘

$F(x)$ $g'(x)$

«конец интегральной стрелки на начало дифференциальной минус интеграл от произведения функций на концах стрелок».

Пример № 1: Найти интеграл, используя метод стрелок: $\int x \cdot e^x dx$.

Решение: $\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$.

' $\int$

1 e^x

Если поменять порядок стрелок, то получится более сложный интеграл. Умение выбрать нужный порядок стрелок очень важен для нахождения подобных интегралов.

Пример № 2: $\int lnxdx = \int 1 \cdot lnxdx = x \cdot lnx - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = xlnx - \int dx =$

$\int$ '

x $\frac{1}{x}$

$= xlnx - x + C.$

Иногда приходится применять метод стрелок несколько раз, чтобы найти нужный интеграл. Главное, чтобы каждое последующее подынтегральное выражение было проще предыдущего.

<u>*Пример № 3:*</u> $\int x^2 \cdot \cos x\, dx = x^2 \cdot \sin x - \int 2x \sin x dx$. После однократного

$$\overset{'}{\downarrow} \qquad \overset{\int}{\downarrow}$$

$$2x \quad \sin x$$

применения метода стрелок получили более простой интеграл. Тем не менее для его вычисления требуется ещё раз применить этот метод:

$$\int 2x \sin x dx = -2x \cdot \cos x - \int 2 \cdot (-\cos x) dx = -\,2x \cos x + \int \cos x dx =$$

$$\overset{'}{\downarrow} \qquad \overset{\int}{\downarrow}$$

$$2 \quad (-\cos x)$$

$= -2x \cos x = 2 \sin x + C.$

Отсюда окончательно: $\int x^2 \cdot \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$.

Определённый интеграл. Методы интегрирования.

<u>Непосредственное интегрирование</u>

Формула Ньютона – Лейбница: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(x)|\,_a^b = F(b) - F(a)}$.

Пример: Вычислить определённый интеграл: $\int_1^4 x^2 dx$.

Решение. $\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ |_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21.$

<u>Метод замены переменной (метод подстановки)</u>

Пример № 1: Вычислить интеграл $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$.

Решение. Применим подстановку $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2, dx = 2tdt$.

Находим новые пределы интегрирования:

x	*1*	*9*
$t=\sqrt{x}$	*1*	*3*

Тогда получим: $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2tdt}{5+2t} = \int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5} dt = \int_1^3 1 - \frac{5}{2t+5} dt = t|_1^3 - 5 \cdot \frac{1}{2} \ln|2t+5| \ |_1^3 = 2 - \frac{5}{2} ln \frac{11}{7}$.

Пример № 2: Вычислить интеграл $\int_2^3 x(3-x)^7 dx$.

Решение. Полагая $t = 3 - x$, получим: $x = 3 - t, dx = -dt$. Пределы интегрирования:

x	*2*	*3*
t	*1*	*0*

$$\int_2^3 x(3-x)^7 dx = \int_1^0 (3-t)t^7(-dt) = \int_1^0 (t^8 - 3t^7)dt = \left(\frac{t^9}{9} - \frac{3}{8}t^8\right)|_1^0 = -\frac{1}{9} + \frac{3}{8} = \frac{19}{72}.$$

<u>Интегрирование по частям в определённом интеграле.</u>

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла:

$$\boldsymbol{\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du}.$$

Пример: вычислить интеграл $\int_1^e (x+1) lnx dx$.

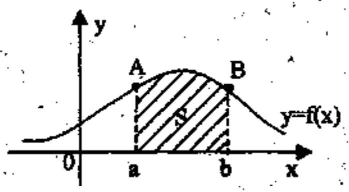
Решение. Положим $u = lnx, dv = (x+1)dx$. Тогда $du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{x^2}{2} + x$.

Получаем $\int_1^e (x+1) lnx dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) lnx|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2} + e - \frac{e^2}{4} - e + \frac{1}{4} + 1 = \frac{e^2+5}{4}$.

<u>Нахождение площади криволинейной трапеции.</u>

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y=f(x)*, двумя прямыми *x=a* и *x=b* и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:

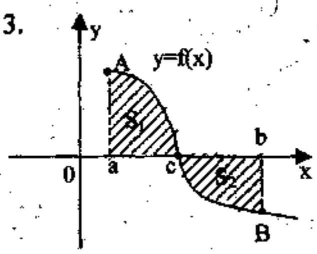
1.



$$S=\int_a^b f(x)dx$$

21

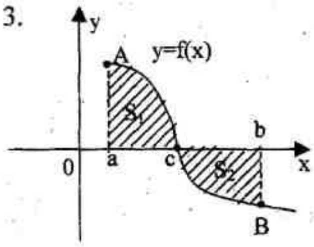
3.



$$f(x)=0 \Rightarrow x=c$$

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

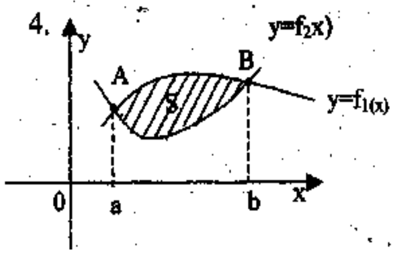
3.



$$f(x)=0 \Rightarrow x=c$$

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

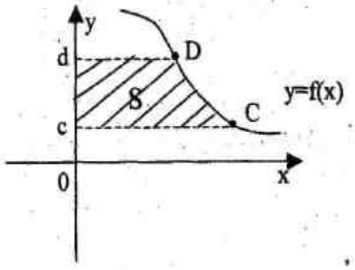
4.



$$f_1(x)=f_2(x) \Rightarrow x_1=a, x_2=b$$

$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx$$

5.



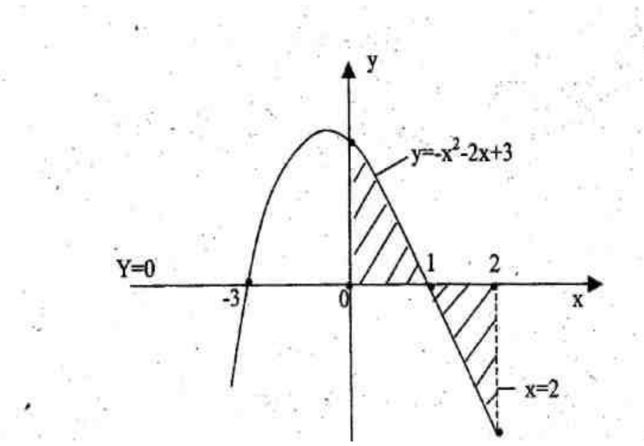
$$y=f(x) \Rightarrow x=\varphi(y)$$

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy$$

Пример 4: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-2x+3$,

осями координат и прямой *x=2*.

Решение: Построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ox: $y = -x^2 - 2x + 3$,

$-x^2 - 2x + 3 = 0$, $x_1=1$, $x_2=-3$

$$S = \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3)dx - \int_1^2 (-x^2 - 2x + 3)dx = \left.\left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\right|_0^1 + \left.\left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\right|_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 + 3 - \left(-\frac{8}{3} - 4 + 6\right) + \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{12}{3} = 4(\text{кв.ед.})$$

Тема 3.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную *x*, искомую функцию *y* и её производные или дифференциалы.

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным,* если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или *интегралом)* дифференциального уравнения называется такая функция, котороая обращает это уравнение в тождество.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

Пример № 1 Найти общее решение уравнения $x(1 + y^2)dx = ydy$.

Решение. Разделим переменные, разделив обе части уравнения на $(1 + y^2)$. Получим:

$$xdx = \frac{ydy}{1+y^2}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$\int xdx = \int \frac{ydy}{1+y^2}$. Получаем $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + \frac{1}{2}lnC$.

Так как произвольная постоянная С может принимать любые числовые значения. То для удобства дальнейших преобразований вместо С мы написали $\frac{1}{2}lnC$. Потенцируя последнее равенство, получим $x^2 = \ln[C(1 + y^2)]$. Это и есть общее решение данного уравнения.

Ответ. $x^2 = \ln[C(1 + y^2)]$

Пример № 2. Найти частное решение уравнения $s\ tgtdt + ds = 0$, удовлетворяющее начальным условиям *s=4* при *t*=$\frac{\pi}{3}$.

<u>*Решение.*</u> Разделив переменные, (поделив обе части уравнения на s) имеем

$$tgtdt + \frac{ds}{s} = 0.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int tgtdt + \int \frac{ds}{s} = lnC\ ;\ \ -lncost + lns = lnC,$$

или $lns = lnC + lncost,$

тогда $s = Ccost$. Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной С подставим значения *t*=$\frac{\pi}{3}$ и *s=4* в выражение для общего решения: $4 = Ccos\frac{\pi}{3}$, или $4 = \frac{C}{2}$, откуда *C=8.*

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $s = 8cost$.

<u>*Ответ.*</u> $s = 8cost$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0,$$

Где *f(x)* и $\varphi(x)$ - функции от *x*, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.* В частном случае *f(x)* и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами.

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью универсальной подстановки *y=uz,* где *u* и *z* – новые функции от *x*.

<u>*Пример № 1*</u> Найти общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

Решение. Это линейное уравнение: здесь $f(x) = -\frac{2}{x+1}, \varphi(x) = -(x+1)^3$.

Проведём универсальную подстановку: $y=uz$ и продифференцируем это равенство по x:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}.$$

Подставив теперь выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в данное уравнение, получим:

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - \frac{2uz}{x+1} = (x+1)^3 \text{или}$$

$$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1}\right) = (x+1)^3. \qquad (*)$$

Так как одну из вспомогательных функций u или z можно выбрать произвольно, то в качестве u возьмём одно из частных решений уравнения $\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0$. Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, имеем

$$\int \frac{du}{u} = 2\int \frac{dx}{x+1}; lnu = 2\ln(x+1), u = (x+1)^2$$

(произвольную постоянную C принимаем равной нулю, т. к. находим одно из частных решений).

Подставим теперь выражение для u в уравнение (*); тогда получим уравнение

$$(x+1)^2\frac{dz}{dx} = (x+1)^3, \text{или} \frac{dz}{dx} = x+1.$$

Отсюда находим

$$\int dz = \int (x+1)dx;\ z = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Зная u и z, теперь получаем общее решение данного уравнения:

$$y = uz = (x+1)^2\left[\frac{(x+1)^2}{2} + C\right] = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

Ответ. $y=\frac{(x+1)^4}{2}+C(x+1)^2$.

Пример № 2. Найти частное решение уравнения $\cos x\,dy + y\sin x\,dx = dx$, если $y=1$ при $x=0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\cos x\,dx$, получим уравнение

$$\frac{dy}{dx} + ytgx = \frac{1}{\cos x}, \qquad (*)$$

которое является линейным. Проведём универсальную подстановку: $y=uz$ и продифференцируем это равенство по x:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$$

Подставив теперь выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение(*) , получим:

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + uztgx = \frac{1}{\cos x},$$

$$\text{или } u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} + utgx\right) = \frac{1}{\cos x}.$$

Для отыскания u получаем уравнение

$$\frac{du}{dx} + utgx = 0, \text{ т. е. } \frac{du}{u} + tgxdx = 0,$$

откуда

$$\int\frac{du}{u} = -\int tgxdx;\ lnu = ln\cos x;\ u = \cos x.$$

Подставляя выражение для u в уравнение (*), имеем

$$\cos x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos x}, \text{ или } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{cos^2 x}, \text{ т. е. } z = tgx + C.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения записывается так:

$$y = uz = \cos x\,(tgx + C) = \sin x + C\cos x.$$

Используя начальные условия *y=1*, *x=0*, имеем $1 = \sin 0 + C\cos 0$, откуда C=1. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = \sin x + \cos x$.

<u>*Ответ.*</u> $y = \sin x + \cos x$.

Неполные дифференциальные уравнения второго порядка

Уравнение, содержащее производные (или дифференциалы) не выше второго порядка, называется *дифференциальным уравнением второго порядка.* В общем виде уравнение второго порядка записывается следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

<u>*Пример №1*</u>. Найти общее решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$.

<u>*Решение.*</u> Полагаем $\frac{dy}{dx} = z$; тогда данное уравнение можно записать в виде:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \sin x$, т. е. $\frac{dz}{dx} = \sin x$, откуда $dz = \sin x\, dx$. Интегрируя последнее равенство, получим $\int dz = \int \sin x\, dx$, т. е. $z = -\cos x + C_1$. Следовательно, $\frac{dy}{dx} = -\cos x + C_1$, т. е. $dy = (-\cos x + C_1)dx$.

Снова интегрируя, находим

$$\int dy = \int(-\cos x + C_1)dx, \text{ или } y = -\sin x + C_1x + C_2.$$

<u>*Ответ.*</u> $y = -\sin x + C_1x + C_2$.

<u>*Пример №2*</u>. Найти частное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx}$, если $y=\frac{3}{2}, \frac{dy}{dx} = 1$ при x=0.

<u>*Решение.*</u> Полагаем $\frac{dy}{dx} = z$. Тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ и, значит, $\frac{dz}{dx} = 2z$. Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dz}{z} = 2dx; \int \frac{dz}{z} = 2\int dx, \ \ lnz = 2x + C_1; \ \ z = e^{2x+C_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+C_1}, \quad (*)$$

$$\text{т. е. } dy = e^{2x+C_1}dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим общее решение исходного уравнения:

$$y = \frac{1}{2}e^{2x+C_1} + C_2. \ (**)$$

Для нахождения искомого частного решения подставим в соотношения (*) и (**) начальные данные:

$$\begin{cases} 1 = e^{2\cdot 0+C_1}, \\ \frac{3}{2} = \frac{1}{2}e^{2\cdot 0+C_1} + C_2, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 1 = e^{C_1}, \\ \frac{3}{2} = \frac{1}{2}e^{C_1} + C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1=0$, $C_2=1$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$.

Ответ. $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0, (*)$$

Где p и q – постоянные величины.

Для отыскания общего решения данного уравнения составляется *характеристическое уравнение*

$$r^2 + pr + q = 0, (**)$$

Которое получается из исходного заменой: $\frac{d^2y}{dx^2} = r^2, \frac{dy}{dx} = r, y=1.$

Тогда общее решение дифференциального уравнения (*) строится в зависимости от корней r_1 и r_2 характеристического уравнения (**). Здесь возможны три случая.

1 случай. Корни r_1 и r_2 – действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения (*) имеет вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

2 случай. Корни r_1 и r_2 – действительные и равные: $r_1 = r_2 = r$. Тогда общее решение уравнения (*) записывается так:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}.$$

3 случай. Корни r_1 и r_2 – комплексно-сопряжённые: $r_1=\alpha+\beta i$; $r_2=\alpha-\beta i$. В этом случае общее решение уравнения (*) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример №1. Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$r^2 - 7r + 10 = 0; r_1=2, r_2=5.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные (***1 случай***) и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения записывается следующим образом:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

Ответ. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$

Пример №2. Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$r^2 - 8r + 16 = 0; r_1 = r_2 = 4.$$

Так как корни характеристического уравнения равные и действительные (***2 случай***), то общее решение данного дифференциального уравнения записывается следующим образом:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{4x}.$$

Ответ. $y = (C_1 + C_2 x)e^{4x}$.

Пример №3. Решить уравнение $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$r^2 - 6r + 25 = 0;\ r_1=3+4i;\ r_2=3-4i.$$

Так как корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые (***3 случай***), где $\alpha=3$, $\beta=4$, то общее решение данного дифференциального уравнения записывается следующим образом:

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Ответ. $y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Пример №4. Найти частное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} = 0$, если $y=1$ и $\frac{dy}{dx} = -1$ при $x=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$r^2 - 5r = 0;\ r_1=0,\ r_2=5.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные (***1 случай***) и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения записывается следующим образом:

$y = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{5x}$, т. е. $y = C_1 + C_2 e^{5x}$.

Для нахождения искомого частного решения нужно определить значения постоянных C_1 и C_2. Подставив в общее решение значения $x=0$, $y=1$(из условия), получим $1 = C_1 + C_2$.

Продифференцировав общее решение и подставив в полученное выражение значения $x=0$, $\frac{dy}{dx} = -1$(из условия), имеем $\frac{dy}{dx} = 5C_2 e^{5x}$; т. е. $-1 = 5C_2$. Отсюда находим: $C_2 = -\frac{1}{5}, C_1 = 1 - C_2 = \frac{6}{5}$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}e^{5x}$.

Ответ. $y = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}e^{5x}$.

Пример №5. Найти частное решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = 0$, если y =1 и $y' = 1$ при x =0.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$r^2 + 8r + 16 = 0;\ r_1 = r_2 = -4.$$

Так как корни характеристического уравнения равные и действительные (***2 случай***), то общее решение данного дифференциального уравнения записывается следующим образом:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-4x} = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}.$$

Дифференцируя общее решение, имеем

$$y' = -4C_1e^{-4x} + C_2e^{-4x} - 4C_2xe^{-4x}.$$

Подставив начальные данные в выражения для y и y', получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = C_1e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0, \\ 1 = -4C_1e^0 + C_2e^0 - 4C_2 \cdot 0 \cdot e^0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -4C_1 + C_2 \end{cases}, \text{откуда}$$

$$C_1 = 1, C_2 = 5.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y = e^{-4x} + 5xe^{-4x}$.

Ответ. $y = e^{-4x} + 5xe^{-4x}$.