ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ АРХАНГЕЛЬСКОЙ ОБЛАСТИ
«МИРНИНСКИЙ ПРОМЫШЛЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ОБЯЗАТЕЛЬНЫХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для специальности: 13.02.11 Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)

2018 г.

Методические рекомендации для ЕН.01 Математика разработаны для выполнения обязательных контрольных работ и составлены в соответствии с рабочей программой и учебным планом по специальности 13.02.11 «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)».

Организация-разработчик: государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Архангельской области «Мирнинский промышленно-экономический техникум»

Разработчики:
Пивоварова Т. В., Преподаватель техникума

ОДОБРЕНЫ цикловой комиссией дисциплин специальностей 09.02.01 и 13.02.11	Составлены в соответствии с требованиями ФГОС по специальности среднего профессионального образования 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы» и учебным планом
Председатель цикловой комиссии В.И.Письменник	Заместитель директора техникума по учебной работе М.Н.Венедиктова

СОДЕРЖАНИЕ

1	Общие методические указания	3
2	Раздел 3. Тема 3.2 Элементы линейной алгебры	4
3	Тема 3.3 Теория комплексных чисел	17
4	Тема 3.4 Теория вероятностей и математическая статистика	24
5	Раздел 4. Основы дифференциального и интегрального исчисления	31
	Список использованной литературы	43

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом. В наше время, казалось бы, найти нужную литературу не составляет труда, но на самом деле, это очень сложный процесс, который занимает огромное количество времени. Поэтому данное методическое пособие перед каждой контрольной работой содержит краткий курс лекций и примеры решения заданий. Контрольные работы позволяют закрепить теоретический материал курса. В процессе обучения студент должен выполнить 2 контрольные работы. Решение задач контрольных работ является проверкой степени усвоения студентом теоретического курса, а рецензии на работу помогают ему доработать и правильно освоить различные разделы курса математики. Перед выполнением контрольной работы необходимо ознакомиться с теорией и примерами решения заданий по данной контрольной работе, а также со справочными материалами, приведёнными в конце методических указаний. Темы контрольных работ для специальности 13.02.11 «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования», учебным планом которой предусмотрено по курсу дисциплины «Математика» 2 контрольные работы, распределены следующим образом:

1 **контрольная работа** – Раздел 1, 2, 3 Темы: Математический анализ, Линейная алгебра, Теория комплексных чисел.

2 **контрольная работа** – Раздел 3, 4 Темы: Теория вероятностей и математическая статистика, Основы дифференциального и интегрального исчисления.

При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

- указывать на титульном листе наименование дисциплины, тему контрольной работы, фамилию и инициалы студента, группу, фамилию и инициалы преподавателя;

- контрольную работу следует выполнять аккуратно, оставляя поля для замечаний рецензента;
- перед выполнением задания необходимо посередине строки написать «Задание № __», переписать задание, после чего написать посередине строки «Решение» и выполнить задание;
- решение заданий должно обязательно сопровождаться подробными пояснениями и формулами;
- для пояснения решения задачи там, где необходимо, аккуратно сделать чертёж;
- в контрольной работе следует указать учебники и учебные пособия, которые использовались при решении заданий.

Контрольные работы, выполненные без соблюдения указанных правил, а также выполненные не по своему варианту не рассматриваются.

Раздел 3. Элементы линейной алгебры

Тема 3.2. Линейная алгебра

Матрицей А размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из чисел или иных математических выражений a_{ij} (называемых элементами матрицы):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица размера $n \times n$, например, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & y & -4 \\ 0 & 2x & 4 \end{pmatrix}$ – квадратная размера 3×3.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т. е. с индексами $i \neq j$) равны 0, например, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$.

Единичной (обозначается *E*) называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали, например, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны 0, например, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§1. *Операции над матрицами.*

Суммой матриц $A=(a_{ij})$ *и* $B=(b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера , причём $c_{ij}= a_{ij}+ b_{ij}$.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$на число λ называется матрица $B=(b_{ij})$ того же размера, что и матрица *A,* причём $b_{ij}=\lambda\, a_{ij}$.

Произведением матриц $A\cdot B$ (размеров $m\times n$ и $n\times r$ соответственно) называется матрица *C* размера $m\times r$, такая, что $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{ki}$.

Произведение матриц A·B существует, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пример № 1. Найти произведение матриц A·B и B·A(если это возможно),если A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, поэтому произведение A·B существует. Найдём это произведение:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \text{1 строка матрицы Априкладывается} \\ \text{к первому столбцу матрицы B,} \\ \text{соответствующие элементы перемножаются,} \\ \text{а произведения складываются.} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 4+2\cdot 0+3\cdot 1 & 1\cdot 5+2\cdot(-2)+3\cdot 8 \\ 1\cdot 3+0\cdot 6+(-1)\cdot 7 & 1\cdot 4+0\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 8 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение B·A не существует, т. к. число столбцов матрицы B(3) не совпадает с числом строк матрицы A (2).

Коммутирующими (или перестановочными) называются матрицы A и B, для которых AB=BA.

Транспонированной к матрице A=(a_{ij}) называется матрица $A^T = (a_{ij}^T)$, такая, что $a_{ij}^T = a_{ji}, \forall i, j$ (т. е. все строки которой равны соответствующим столбцам матрицы A).

Пример № 2. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Записывая первую и вторую строки матрицы A как первый и, соответственно, второй столбец матрицы A^T, получим матрицу $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание № 1(пример). *Найти значение матричного многочлена f(A), если* $f(x) = -2x^2 + 5x + 9, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. $f(A) = -2A^2 + 5A + 9E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

1) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
2) $-2A^2 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$.
3) $5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$.
4) $9E = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.
5) $f(A) = \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 + 5 + 9 & -4 + 10 + 0 \\ -6 + 15 + 0 & -12 + 0 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответ. $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$.

Элемент строки матрицы называется *крайним*, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю. Матрица называется *ступенчатой*, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

Например, $A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & 3 \end{pmatrix}$ – не ступенчатая, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – ступенчатая. В каждой из матриц подчёркнуты крайние элементы каждой строки.

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие операции:

1) Перемена местами двух строк (столбцов).
2) Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
3) Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица В. полученная из матрицы А с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* матрице А (обозначается В~А).

Пример № 3. Привести к ступенчатому виду матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований над строками.

Решение.

1) Сделаем нулевыми все элементы матрицы под крайним элементом первой строки. Для этого вычтем из второй строки первую, умноженную на 3, и запишем результат во вторую строку. А к третьей строке прибавим первую, умноженную на 5, и запишем результат в третью строку.
2) Теперь сделаем равными нулю все элементы матрицы под крайним элементом второй строки. Для этого умножим вторую строку на 3. Третью строку – на 2. Полученный результат сложим и запишем в третью строку. Это будем записывать так: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} II - 3 \cdot I \\ III + 5 \cdot I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} 2 \cdot III + 3 \cdot II \sim$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$ – ступенчатая матрица.

§2. *Определители.*

Любой квадратной матрице n-го порядка $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ можно поставить в соответствие выражение, которое называется *определителем (детерминантом)* матрицы А, и обозначается так: $A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ или |А| или *det* А.

<u>Вычисление определителей</u>. Определитель матрицы *А* размера *2*х*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *А* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

<u>Задание №2 (пример).</u> Вычислить определитель: $\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}$

<u>Решение.</u> При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой $\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$, а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Запишем это так: *det* A=$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} — 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$ $2 \cdot (-1 \cdot 0 - 2 \cdot 5) + 3(4 \cdot 0 - 2 \cdot 3) - 1 \cdot (4 \cdot 5 — 1) \cdot 3 = 2 \cdot (-10) + 3 \cdot (-6) - 1 \cdot (20 + 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$

<u>Ответ.</u> Det A= –61.

§3. *Ранг матрицы.*

Минором k-го порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо *k* строк и *k* столбцов.

В матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ можно указать, например, такие миноры:

- 2-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$;
- 3-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix}$;
- 1-го порядка $|2|, |3|, |-7|$.

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков её миноров, не равных нулю. Обозначается *r(A), rang(A).*

Теорема 1 При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Теорема 2 Ранг ступенчатой матрицы равен количеству её ненулевых строк.

<u>*Метод элементарных преобразований* нахождения ранга матрицы заключается в том, что матрицу A приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы A</u> .

Пример № 4. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведём матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot II - I \\ 2 \cdot III - I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix}_{III + 3 \cdot II} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит её ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы равен 2.

Rang A=2.

§4. *Обратная матрица. Матричные уравнения.*

Обратной матрицей к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Замечание. Если матрица A^{-1} существует, то она единственна.

Присоединённой матрицей к квадратной матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $\widetilde{A} = (A_{ij})^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij}.

Теорема 3 Если квадратная матрица A – невырожденная (т. е. det A≠0), то $A^{-1} = \frac{1}{det\, A} \cdot \widetilde{A}$**.**

Метод присоединённой матрицы вычисления обратной матрицы к невырожденной матрице *A* состоит в применении теоремы 1. 3.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ называется произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы *A* называется минор, составленный из элементов *A*, оставшихся после вычёркивания *i*-строки и *j*-столбца.

Например, в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ минором M_{21}является определитель, составленный из элементов матрицы, оставшихся после вычёркивания 2-й строки и 1-го столбца: M_{21}=$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 8 = -24$. Соответственно, алгебраическим дополнением $А_{21}$ будет число $А_{21} = (-1)^{2+1} \cdot М_{21} = (-1)^3 \cdot -24 = 24.$

Матричные уравнения простейшего вида и их решения с неизвестной матрицей X и их решения записываются следующим образом:

$$AX = B, \quad \text{решение:} X = A^{-1}B;$$
$$XA = B, \quad \text{решение:} X = BA^{-1};$$
$$AXC = B, \quad \text{решение:} X = A^{-1}BC^{-1}.$$

Пример № 5. Найти методом присоединённой матрицы матрицу, обратную к данной: $А = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) Найдём det A:

   det A=$1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -48 - 2(-42) + 3(32 - 35) = -48 + 84 - 9 = 27 \neq 0.$

   Так как det A≠0, то A^{-1} существует.

2) Найдём алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы А:

$$А_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48;$$

$$А_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) = 42;$$

$$А_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3;$$

$$А_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24;$$

$$А_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21;$$

$$А_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

3) Запишем матрицу $\widetilde{A} = \left(A_{ij}\right)^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

4) Найдём матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Системы линейных уравнений.

§1. Исследование систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (*)$$

Если система имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения.

Систему (*) можно записать в матричной форме: $AX=B$, где

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – *матрица системы*, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *столбец неизвестных*,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ –*столбец свободных членов.*

Матрица $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей системы.*

Теорема (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы: r(A)=r($(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$.

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы – выяснить, определена она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если *r(A)<r(A|B)*, то система несовместна.
2) Если *r(A)=r(A|B)=n* (где *n* – число неизвестных), то система совместна и определена.
3) Если *r(A)=r(A|B)<n*, то система совместна и неопределенна.

Исследование систем линейных уравнений методом Гаусса.

Задание №4 (пример).

А) Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 16 \end{cases}$

Решение. Приведём к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{c} II - I \\ III + 2 \cdot I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) III - 2 \cdot II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

Так как *r(A)=r(A|B)=2, n=3 ,согласно п. 3 (r(A)=r(A|B)<n)система совместна и неопределенна* (т. е. имеет бесконечно много решений). Найдём общее решение системы и одно из частных решений системы. Количество главных переменных равно *r(A)=2,* количество свободных переменных равно *n– r(A)=3–2=1.* Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы А, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы – 1-й и 2-й столбцы матрицы А – соответствуют переменным x_1 *и* x_2 – это будут *главные переменные*, а x_3 –

свободная переменная. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

Теперь для наглядности запишем эту систему в другом виде (слева остаются только главные переменные): $\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 4 \\ x_2 = 2x_3 + 4. \end{cases}$

Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим $x_1 = -x_3 - 8$. Обозначая свободную переменную x_3 через t, получим *общее решение системы:* $(-t-8; 2t+4; t)$. *Частное решение системы* получим, например, при $t=0$: *(–8; 4; 0).*

<u>Ответ.</u> Система совместна и неопределенна; общее решение $(-t-8; 2t+4; t)$; частное решение *(–8; 4; 0).*

Б) Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

<u>Решение.</u> Приведём к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} II - I \\ III + 2\cdot I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) III - 2\cdot II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right).$$

Так как $r(A)=2$, а $r(A|B)=3$, то согласно п. 1($r(A)<r(A|B)$) система несовместна.

<u>Ответ.</u> Система несовместна.

В) Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$.

<u>Решение.</u> Приведём к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) I \leftrightarrow III \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} I\cdot(-3) + II \\ I\cdot(-2) + III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) III \div (-5) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Так как $r(A)=r(A|B)=3$, $n=3$ *,согласно п. 2 ($r(A)=r(A|B)=n$)система совместна и определена.* Найдём решение системы. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 5x_2 - 7x_3 = -7 \\ x_3 = 1 \end{cases}$. Решим эту систему:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 4\cdot 1 + 3 \\ 5x_2 = 7\cdot 1 - 7 = 0\,; \\ x_3 = 1 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2\cdot 0 - 4\cdot 1 + 3 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

Ответ. Система совместна и определена; общее решение (–1;0;1); частное решение (–1;0;1).

§2. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы и по методу Крамера.

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными задана в матричной форме: $AX=B$, где $A=(a_{ij})$ – матрица коэффициентов системы размера $n\times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Если D – определитель матрицы A – не равен нулю, то система совместна и определена, её решение задаётся формулой: $X = A^{-1}\cdot B$. Другую форму записи этого утверждения дают *формулы Крамера:*

$x_k = \frac{D_k}{D}$, k=1, 2, …, n, где D_k – определитель, получающийся из D заменой k-го столбца на столбец свободных членов.

Задание №3 (пример). Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$

Решение.

а) Решим систему по формулам Крамера. Для этого найдём определитель матрицы системы: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27$. Так как $D\neq 0$, то система совместна и определена.

Найдём определители D_1, D_2, D_3 подставляя столбец свободных членов $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ вместо первого, второго и третьего столбцов определителя D соответственно:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-48) - 2 \cdot 36 +$$
$$+3(72 + 30) = -54,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot 36 - 6 \cdot (-42) + 3 \cdot (-24 - 63) = 27,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-30 - 72) - 2(-24 - 63) + 6 \cdot (32 - 35) = 54.$$

Отсюда получаем решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-54}{27} = -2$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{27}{27} = 1$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{54}{27} = 2$$

Ответ. (−2; 1; 2).

Б) Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдём матрицу A^{-1}, обратную к матрице системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Эта матрица найдена в <u>примере</u> <u>№ 5</u>: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$. Найдём решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \cdot 6 + \frac{8}{9} \cdot 9 - \frac{1}{9} \cdot (-6) \\ \frac{14}{9} \cdot 6 - \frac{7}{9} \cdot 9 + \frac{2}{9} \cdot (-6) \\ -\frac{1}{9} \cdot 6 + \frac{2}{9} \cdot 9 - \frac{1}{9} \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{9} \\ \frac{9}{9} \\ \frac{18}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Ответ.</u> $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Тема 3.3 Теория комплексных чисел

Мнимые числа, которыми мы дополняем действительные числа, записываются в виде bi, где i – мнимая единица, причем $i^2 = -1$.

Исходя из этого, получим следующее определение комплексного числа.

<u>Определение</u>. Комплексным числом называется выражение вида a + bi, где a и b - действительные числа. При этом выполняются условия:

а) Два комплексных числа $a_1 + b_1i$ и $a_2 + b_2i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

б) Сложение комплексных чисел определяется правилом:

$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i.$

в) Умножение комплексных чисел определяется правилом:

$(a_1 + b_1i)\,(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)\, i.$

<u>3. Алгебраическая форма комплексного числа.</u>

Запись комплексного числа в виде ***a + bi*** **называют алгебраической формой комплексного числа**, где a – действительная часть, bi – мнимая часть, причем b – действительное число.

Комплексное число $a + bi$ считается равным нулю, если его действительная и мнимая части равны нулю: $a = b = 0$

Комплексное число $a + bi$ при $b = 0$ считается совпадающим с действительным числом a: $a + 0i = a$.

Комплексное число $a + bi$ при $a = 0$ называется чисто мнимым и обозначается bi: $0 + bi = bi$.

Два комплексных числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a – bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются сопряженными.

4. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Над комплексными числами в алгебраической форме можно выполнять следующие действия.

1) Сложение.

Определение. Суммой комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число z, действительная часть которого равна сумме действительных частей z_1 и z_2, а мнимая часть - сумме мнимых частей чисел z_1 и z_2 , то есть $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$.

Числа z_1 и z_2 называются слагаемыми.

Сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1°. Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2°. Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3°. Комплексное число $– a – bi$ называется противоположным комплексному числу $z = a + bi$. Комплексное число, противоположное комплексному числу z, обозначается $-z$. Сумма комплексных чисел z и $-z$ равна нулю: $z + (-z) = 0$

Пример 1. Выполните сложение $(3 – i) + (-1 + 2i)$.

$(3 – i) + (-1 + 2i) = (3 + (-1)) + (-1 + 2) i = 2 + 1i$.

2) Вычитание.

Определение. Вычесть из комплексного числа z_1 комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z + z_2 = z_1$.

Теорема. Разность комплексных чисел существует и притом единственна.

Пример 2. Выполните вычитание $(4 – 2i) - (-3 + 2i)$.

$(4 – 2i) - (-3 + 2i) = (4 - (-3)) + (-2 - 2) i = 7 – 4i$.

3) Умножение.

Определение. Произведением комплексных чисел $z_1=a_1+ b_1 i$ и $z_2=a_2+b_2 i$ называется комплексное число z, определяемое равенством:

$z = (a1a2 – b1b2) + (a1b2 + a2b1) i$.

Числа z_1 и z_2 называются сомножителями.

Умножение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1°. Коммутативность: $z1z2 = z2z1$.

2°. Ассоциативность: $(z1z2)z3 = z1(z2z3)$

3°. Дистрибутивность умножения относительно сложения:

(z1 + z2) z3 = z1z3 + z2z3.

4°. $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ - действительное число.

На практике умножение комплексных чисел производят по правилу умножения суммы на сумму и выделения действительной и мнимой части.

В следующем примере рассмотрим умножение комплексных чисел двумя способами: по правилу и умножением суммы на сумму.

Пример 3. Выполните умножение $(2 + 3i)(5 - 7i)$.

1 способ. $(2 + 3i)(5 - 7i) = (2\cdot 5 - 3\cdot(-7)) + (2\cdot(-7) + 3\cdot 5)i =$

$= (10 + 21) + (-14 + 15)i = 31 + i.$

2 способ. $(2 + 3i)(5 - 7i) = 2\cdot 5 + 2\cdot(-7i) + 3i\cdot 5 + 3i\cdot(-7i) =$

$= 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i.$

4) Деление.

Определение. Разделить комплексное число *z1* на комплексное число *z2*, значит найти такое комплексное число *z*, что *z · z2 = z1*.

Теорема. Частное комплексных чисел существует и единственно, если $z2 \neq 0 + 0i$.

На практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} =$

$= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$.

В следующем примере выполним деление по формуле и правилу умножения на число, сопряженное знаменателю.

Пример 4. Найти частное $\frac{2-3i}{5+2i}$.

1 способ. $\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{2\cdot 5 + (-3)\cdot 2}{5^2 + 2^2} + \frac{5\cdot(-3) - 2\cdot 2}{5^2 + 2^2}i = \frac{10-6}{25+4} + \frac{-15-4}{25+4}i = \frac{4}{29} - \frac{19}{29}i$.

2 способ. $\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{(2-3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{10-4i-15i-6}{5^2-(2i)^2} = \frac{4-19i}{25+4} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29}i$.

5) Возведение в целую положительную степень.

а) Степени мнимой единицы.

Пользуясь равенством $i^2 = -1$, легко определить любую целую положительную степень мнимой единицы. Имеем:

$i^3 = i^2\, i = -i,$

$i^4 = i^2\, i^2 = 1,$

$i^5 = i^4\, i = i,$

$i^6 = i^4\, i^2 = -1,$

$i^7 = i^5 i^2 = -i,$

$i^8 = i^6 i^2 = 1$ и т. д.

Это показывает, что значения степени i^n, где n – целое положительное число, периодически повторяется при увеличении показателя на 4 .

Поэтому, чтобы возвести число i в целую положительную степень, надо показатель степени разделить на 4 и возвести i в степень, показатель которой равен остатку от деления.

Пример 5. Вычислите: $(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23}$.

$i^{36} = (i^4)^9 = 1^9 = 1,$

$i^{17} = i^{4\cdot 4+1} = (i^4)^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$

$i^{23} = i^{4\cdot 5+3} = (i^4)^5 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i.$

$(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23} = (1 + i)(-i) = -i + 1 = 1 - i.$

б) Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собой частный случай умножения одинаковых комплексных сомножителей.

Пример 6. Вычислите: $(4 + 2i)^3$

$(4 + 2i)^3 = 4^3 + 3\cdot 4^2\cdot 2i + 3\cdot 4\cdot (2i)^2 + (2i)^3 = 64 + 96i - 48 - 8i = 16 + 88i.$

5. Геометрическое изображение комплексных чисел.

а) Комплексные числа изображают точками плоскости по следующему правилу: $a + bi = M\,(a; b)$ (рис.1).

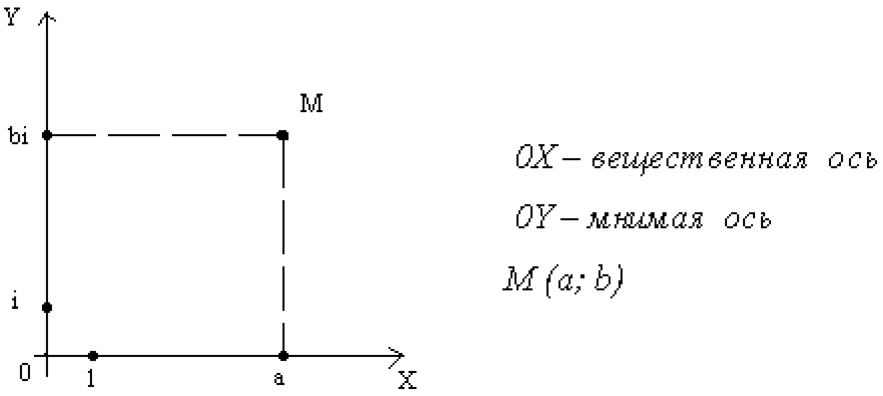
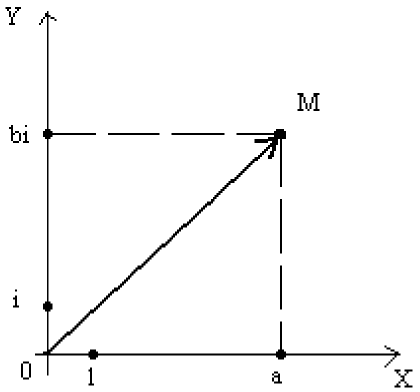


Рисунок 1

б) Комплексное число можно изобразить вектором, который имеет начало в точке O и конец в данной точке (рис.2).



$\overline{OM}(a;b)$

Рисунок 2

Пример *7*. Постройте точки, изображающие комплексные числа: *1; - i; - 1 + i; 2 – 3i* (рис.3).

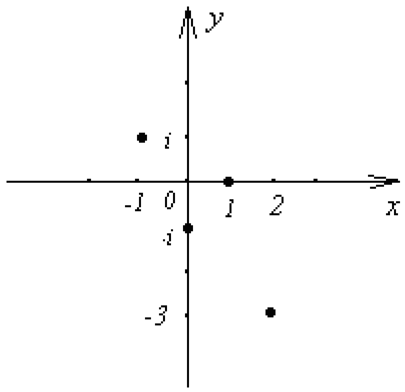


Рисунок 3

6. Тригонометрическая запись комплексных чисел.

Комплексное число $z = a + bi$ можно задать с помощью радиус – вектора $\bar{r}=\overline{OM}$ с координатами *(a; b)* (рис.4).

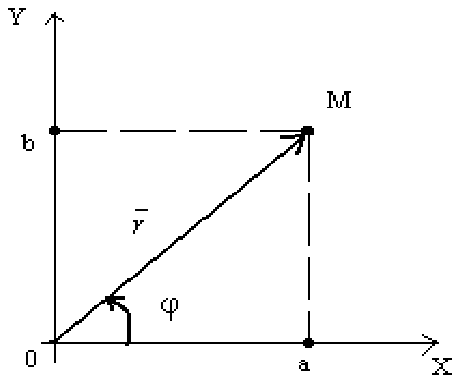


Рисунок 4

Определение. Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется модулем этого числа и обозначается $|z|$ или *r*.

Для любого комплексного числа z его модуль $r = |z|$ определяется однозначно по формуле $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Определение. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется аргументом этого комплексного числа и обозначается *Arg* z или φ.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k = 0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2;\ \ldots)$: $Arg\ z = arg\ z + 2\pi k$, где $arg\ z$ – главное значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, то есть $-\pi\ arg\ z \leq \pi$ *(иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$).*

$a = r \cdot \cos\varphi,\ b = r \cdot \sin\varphi.$

Следовательно, комплексное число $z = a + bi$ можно записать в виде:

$z = r \cdot \cos\varphi + i\, r \cdot \sin\varphi$ *или* $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

Такая запись комплексного числа называется тригонометрической формой комплексного числа.

Пример 8. Представить в тригонометрической форме комплексное число $1 - i$.

$a = 1,\ b = -1.$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\varphi = \frac{7}{4}\pi$.

$1 - i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{7}{4}\pi + i \sin\frac{7}{4}\pi)$.

<u>7. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.</u>

1) Умножение.

Пусть два числа заданы и в алгебраической и в тригонометрической формах:

$z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1),\ z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$.

На основании исходного определения правила умножения и формулы косинуса и синуса суммы получаем:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2));\ r_1 \cdot r_2 0.$

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме обладает следующими свойствами:

1°. Коммутативность: $z_1 z_2 = z_2 z_1$

2^o. Ассоциативность: $(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2\, z_3)$.

Пример 9. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2\cos 50^o + 2\, i \sin 50^o$,

$z_2 = \cos 40^o + i \sin 40^o$.

Решение. Тригонометрические формы этих чисел имеют вид:

$z_1 = 2 \cdot (\cos 50^o + i \sin 50^o)$, $z_2 = 1 \cdot (\cos 40^o + i \sin 40^o)$.

Тогда $z_1 \cdot z_2 = 1 \cdot 2 \cdot (\cos (50^o + 40^o) + i \sin (50^o + 40^o)) = 2(\cos 90^o + i \sin 90^o) = 2(0 + i) = 2i$.

2) Деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Деление в поле комплексных чисел на числа, отличные от нуля, всегда выполнимо. Если числа z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме

$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, *причем* $z_1 \neq 0$, *то комплексное число* $y = \frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right) [\cos (\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin (\varphi_2 - \varphi_1)]$ *является частным чисел* z_1 *и* z_2 *(то есть* $z_1 y = z_2$*).*

Пример 10. Найти частное комплексных чисел $z_1 = 2\cos 50^o + 2\, i \sin 50^o$,

$z_2 = \cos 40^o + i \sin 40^o$.

Решение. Тригонометрические формы этих чисел имеют вид:

$z_1 = 2 \cdot (\cos 50^o + i \sin 50^o)$, $z_2 = 1 \cdot (\cos 40^o + i \sin 40^o)$.

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1}(\cos (50^o - 40^o) + i \sin (50^o - 40^o)) = 2(\cos 10^o + i \sin 10^o)$.

3) Возведение в степень.

Определение. n *– ой степенью комплексного числа* z *называется комплексное число, получающееся в результате умножения числа* z *самого на себя* n *раз.*

Число z *называется основанием степени, а натуральное число* n *– показателем степени.*

Возвести комплексное число в n – ую степень можно по формуле:

$z^n = (r^n) [\cos (n\varphi) + i \sin (n\varphi)]$.

Эту формулу при $r = 1$ часто называют *формулой Муавра:*

$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos (n\varphi) + i \sin (n\varphi)$, $n \in N$.

Пример 11. Вычислите $(1 + i)^{100}$.

Запишем комплексное число $1 + i$ в тригонометрической форме.

$a = 1$, $b = 1$.

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$(1+i)^{100} = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^{100} = (\sqrt{2})^{100}(\cos\frac{\pi}{4}\cdot 100 + i\sin\frac{\pi}{4}\cdot 100) = = 2^{50}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi) = 2^{50}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{50}$.

4) Извлечение квадратного корня из комплексного числа.

При извлечении квадратного корня из комплексного числа a + bi имеем два случая*:*

если b o, то $\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$;

если b , то $\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$.

Так как из комплексного числа всегда можно извлечь квадратный корень, то любое квадратное уравнение всегда будет иметь решения во множестве комплексных чисел. Решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ можно найти по известной формуле*:* $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Пример 12. Вычислите $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$.

Так как *b* , то воспользуемся формулой

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$$

$$\sqrt{1-\sqrt{3}i} = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+3}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+3}}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1+2}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+2}{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\sqrt{1-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sqrt{1-\sqrt{3}i} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тема 3.4 Теория вероятностей и математическая статистика

Пусть задано множество, содержащее конечное число элементов. (Студенты в группе, яблоки в корзине, набор костей домино и т.д.) Такие множества будем называть конечными и обозначать {a,b,c,d}. Если каждому элементу конечного множества поставлены в соответствие натуральные числа, то такое упорядоченное множество называется перестановкой и обозначается (a,b,c,d). Сколько перестановок можно составить из n-элементного множества? Из трехэлементного 6: (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a).

Число перестановок из n-элементного множества вычисляется по формуле: $\mathbf{P_n = n!}$, где **n!** - произведение **n(n - 1)(n - 2)(n - 3)…3*2*1**. Полезна рекуррентная формула $\mathbf{P_n = n \cdot P_{n-1}}$. Прост и комбинаторный смысл числа перестановок: сколькими способами можно упорядочить конечное n-элементное множество.

Размещением из n по k называется упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества. По смыслу определения ясно, что k $\leq$ n. Число размещений из n по k обозначается A_n^k. Очевидно, что A_n^n **= P_n = n!,** A_n^1 **= n,** A_n^2 **=n*(n – 1),** A_n^3 **=n*(n –1)*(n–2)** A_n^4 **=n*(n – 1)*(n – 2)*(n – 3)** и т.д. A_n^k **-** это произведение k старших сомножителя натурального числа n, т. е. A_n^k **= n*(n – 1)*(n – 2)*…*(n – k + 1)** (*). Помножая и деля это выражение на (n – k)! можно получить еще формулу:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$ = n(n –1)(n – 2)(n –3)…3*2*1, т.е. k старших сомножителя числа n.

Сочетанием из n по k называется неупорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества. По смыслу определения ясно, что k $\leq$ n. Число сочетаний из n по k обозначается C_n^k. Очевидно, что неупорядоченных подмножеств n-элементного множества в k! меньше чем упорядоченных подмножеств, т.е. C_n^k =

$$\frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n*(n-1)*...*(n-k+1)}{k!}$$ (*)

Помножая и деля это выражение на (n – k)! можно получить еще формулу:

$$C_n^k = \frac{n*(n-1)*...*(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

На практике, для вычисления C_n^k используют формулу (*)

Некоторые важные свойства числа сочетаний, которые необходимо применять при решении различных задач:

1) $C_n^0 = C_0^0$ = 1; 2) C_n^1 = n; 3) $C_n^k = C_n^{n-k}$ - эту формулу удобно применять при k > n/2

Пример 1 Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 7 местам?

Решение. В задаче речь идёт о перестановках из 7 элементов. P_n=n! P_7=7!=7·6·5·4·3·2·1=5040

Ответ. 5040 способами.

Пример 2 Сколькими способами из 15 рабочих можно создать бригады по 5 человек в каждой?

Решение. Речь идёт о сочетаниях по 5 элементов из 15: $C_{15}^5 = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10!}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot10!}$=3003.

Ответ. 3003 способами.

Классическое определение вероятности

Наблюдаемые нами события можно разделить на достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

Случайным называют событие, которое может произойти, либо не произойти, если будет осуществлена определенная совокупность условий. Т.е. под случайным событием, связанным с некоторым опытом, будем понимать всякое событие, которое либо происходит, либо не происходит при осуществлении этого опыта.

Вместо слов «осуществлена совокупность условий» зачастую говорят «произведено испытание».

События называют ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании. В противном случае события называют ***совместными***.

Пример 1. При бросании игральной кости выпадение 3 очков и 6 очков события несовместные, так как они одновременно не могут произойти в одном и том же опыте.

Пример 2. А — появление четырех очков при бросании игральной кости; В- появление четного числа очков. События А и В совместные, так появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Система событий образует ***полную группу*** для данного испытания, если любым исходом его является одно или только одно событие этой группы.

Возможные, исключающие друг друга, результаты одного испытания называются ***элементарными исходами*** испытания.

Исход испытания называется ***благоприятствующим*** некоторому событию, если в результате этого исхода появляется указанное событие.

События называются ***равновозможными***, если нет оснований считать одно из них более или менее возможным, чем остальные.

Вероятностью **P(A)** события **A** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов m к общему числу n всех возможных элементарных исходов испытания, образующих полную группу, т.е **P(A) =** $\frac{m}{n}$

Свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей.

Таким образом, вероятность любого события **А** удовлетворяет неравенству:

$0 \le P(A) \le 1$.

Классическое определение вероятности при переходе от простейших примеров к сложным задачам наталкивается на трудности принципиального характера. Во-первых, число элементарных исходов испытания не всегда конечно, во-вторых, очень часто невозможно представить результат в виде совокупности элементарных исходов, в-третьих, трудно указать основания, позволяющие считать элементарные исходы равновозможными. Поэтому используют также статистическое определение вероятности.

Относительной частотой события А называют отношение числа испытаний m, в которых событие А появилось, к общему числу n фактически проведенных испытаний,

т.е. **W (A) =** $\frac{m}{n}$.

Пример 3. Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 чёрных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется чёрным.

Решение. Всего шаров в урне 5+3=8. Число случаев, благоприятствующих событию А (достали чёрный шар), равно 3 (по количеству чёрных шаров). Тогда вероятность достать чёрный шар: $P(A) = \frac{3}{8}$.

Ответ. 3/8.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой А + В событий называется событие, состоящее в том, что в результате опыта наступит **или событие А, или событие В, или оба вместе**. (Другими словами, суммой А+В событий А и В называется событие, состоящее в появлении **хотя бы одного из этих событий**): Если события А и В несовместны, то А + В – это событие А, или событие В. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением АВ событий А и В называется событие, состоящее **в совместном появлении и события А, и события В**. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в их совместном появлении.

Событием, противоположным событию А, называется событие, обозначаемое А и состоящее в том, что в результате опыта **событие А не наступит**.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: P(A + B) = P(A) + P(B) Следствие1. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: P(A1 + A2+ …+ An) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + …+ P(An).*

Следствие 2. Если события А1, А2, А3, …An образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна единице: P(A1) + P(A2) + P(A3) + …+ P(An) = 1.

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: P(A) + P(A) = 1.

Событие А называется независимым от события В, если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет.

Событие А называется зависимым от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло это событие В или нет.

Вероятность события А, вычисляемая при условии, что событие В произошло, называется условной вероятностью события а и обозначается $\boldsymbol{P_в(A)}$.

Теорема умножения вероятностей. *Вероятность произведения двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое из них произошло:* $P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$.

Следствие 1. Если событие А не зависит от события В, то и событие В не зависит от события А.

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: P(AB) = P(A)P(B).

Для вычисления вероятности совместного появления большего числа событий, например, четырех, используют формулу: $P(ABCD) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C)P_{ABC}(D)$.

Для нескольких независимых в совокупности событий вероятность их произведения равна произведению их вероятностей: P(A1A2…A3) = P(A1)P(A2)…P(An).

Следствие 3. Вероятность появления хотя бы одного из событий А1,А2…An., независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных событий А 1, А 2,… А n: PA1 + A 2 + …An) = 1 – P(A 1) P(A 2)… P(A n)

<u>Теорема сложения вероятностей совместных событий.</u> *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB).*

<u>Пример 1.</u> В ящике случайным образом разложены 20 деталей, причём 5 из них стандартные. Рабочий берёт наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной (событие А)

<u>Решение.</u> **<u>1</u> <u>способ</u>** По крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдёт любое из трёх несовместных событий:

В – одна деталь стандартная, две нестандартные;
С – две детали стандартные, одна нестандартная;
D – три детали стандартные.
Событие А можно представить в виде суммы трёх событий: А=В+С+D. По теореме сложения несовместных событий имеем P(A)=P(B)+P(C)+P(D). Находим вероятность каждого из этих событий:
P(B)=$\frac{C_5^1 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3} = \frac{35}{76}$ P(C)=$\frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{5}{38}$ P(D)=$\frac{C_5^3}{C_{20}^3}$=$\frac{1}{114}$.
P(A)=$\frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228}$.

<u>2 способ</u> Событие А (хотя бы одна из трёх деталей оказалась стандартной) и $\bar{A}$ (ни одна деталь из взятых не оказалась стандартной) являются противоположными; поэтому P(A)+ P($\bar{A}$)=1 или P(A)=1–P($\bar{A}$).
Вероятность появления события $\bar{A}$ составляет P$(\bar{A}) = \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = \frac{91}{228}$. Следовательно, искомая вероятность P(A)=1–$\frac{91}{228} = \frac{137}{228}$.

<u>Ответ.</u> $\frac{137}{228}$.

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть событие А может произойти в результате осуществления одного события из некоторой полной группы событий H1, H2, …Hn. События этой группы обычно называют ***гипотезами***.
Тогда **P(A) = P(H1)P_{H1}(A) + P(H2) P_{H2}(A) +…+ P(Hn)P_{Hn}(A)** (1) - ***формула полной вероятности***, причем **P(H1) +P(H2) +…+ P(Hn) = 1**.
Пусть в результате испытания произошло событие А, которое могло наступить только вместе с одним из событий H1, H2,…Hn, образующих полную группу событий (они

называются гипотезами). Требуется найти вероятность событий H1, H2,… Hn после испытания, когда событие А имело место (произошло).
Для нахождения этих вероятностей используют ***формулу Байеса (формулу вероятности гипотез***): $\boldsymbol{P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}}$

где $P(B_i)$ – вероятность каждой из гипотез после испытания, в результате которого наступило событие А; $P_{B_i}(A)$ - условная вероятность события А после наступления события B_i, а P(A) находится по формуле полной вероятности.

<u>Пример 1</u> На склад поступили детали с трёх станков. На первом станке изготовлено 40% деталей от их общего количества, на втором – 35% и на третьем 25%, причём на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором – 80% и на третьем – 70%. Какова вероятность того, что наугад взятая деталь окажется первого сорта?

<u>Решение.</u> Пусть B_1 – деталь изготовлена на первом станке, B_2 – на втором, B_3 – на третьем станке. А – деталь оказалась первого сорта. Из условия следует, что $P(B_1)=0,4$; $P(B_2)=0,35$; $P(B_3)=0,25$. А так же $P_{B1}(A)=0,9$; $P_{B2}(A)=0,8$; $P_{B3}(A)=0,7$. Тогда по формуле полной вероятности $P(A)= P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+ P(B_2)\cdot P_{B2}(A)+ P(B_3)\cdot P_{B3}(A)=0,4\cdot 0,9+0,35\cdot 0,8+0,25\cdot 0,7=0,815$

<u>Ответ.</u> 0,815

<u>Пример 2</u> В первом ящике имеются 8 белых и 6 чёрных шаров, а во втором – 10 белых и 4 чёрных. Наугад выбирают ящик и шар. Известно, что вынутый шар – чёрный. Найти вероятность того, что был выбран первый ящик.

<u>Решение.</u> Пусть B_1 – был выбран первый ящик, B_2 – был выбран второй ящик; А – при проведении двух последовательных испытаний выбора ящика и выбора шара был вынут чёрный шар. Тогда $P(B_1)=0,5$, $P(B_2)=0,5$. Вероятность извлечения чёрного шара после того, как выбран первый ящик, составляет $P_{B1}(A)=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$. Вероятность извлечения чёрного шара после того, как выбран второй ящик, равна $P_{B2}(A)=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$. Находим полную вероятность $P(A)= P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+ P(B_2)\cdot P_{B2}(A)=1/2 \cdot 3/7+1/2 \cdot 2/7=5/14$.

По формуле Байеса находим искомую вероятность: $P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{5}{14}} = \frac{3}{5} = 0,6.$

<u>Ответ.</u> 0,6

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Если производятся испытания, при которых вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются

независимыми относительно события А. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А равна p (где $0< p < 1$), событие А наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности) находится по ***формуле Бернулли:***

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} \text{ где } q = 1 - p.$$

<u>Пример 1</u> Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,8. Найти вероятность четырёх попаданий при шести выстрелах.

<u>Решение.</u> Всего выстрелов 6, значит, n=6. Число попаданий равно 4, значит, k=4. Вероятность попадания при одном выстреле 0,8, следовательно, p=0,8. Тогда, согласно формуле $q = 1 - p$, q=1–0,8=0,2.

По формуле Бернулли $P_6(4) = \frac{6!}{4!(6-4)!} 0{,}8^4 0{,}2^{6-4} = 0{,}246.$

<u>Ответ.</u> 0,246

Раздел 4. Основы интегрального и дифференциального исчисления

Дифференциальное исчисление

1. $(c)' = 0, (cu)' = cu';$
2. $x' = 1$
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in R)$
4. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
5. $(\frac{1}{u^n})' = -\frac{n}{u^{n+1}} \cdot u'$
6. $(u + v)' = u' + v';$
7. $(uv)' = u'v + v'u;$
8. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
10. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
12. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
13. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
14. $(\cos u)' = \sin u \cdot u'$
15. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
16. $(ctgu)' = \frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
17. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
18. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
19. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

11. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

20. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Правила вычисления производной.

1. $(cu)' = c \cdot u'$, т. е. постоянный множитель можно вынести за знак производной.
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, т. е. производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных.
3. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Общая схема исследования функции и построение её графика.

1. Найдите область определения функции.
2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.
3. Найдите промежутки знакопостоянства.
4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.
5. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки перегиба.
6. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Постройте график функции, используя полученные результаты исследования.

Построить график функции: $y = x \cdot e^x$

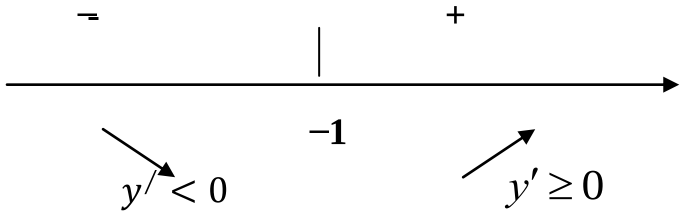
1. D(y) = R
2. Функция не является четной и нечетной.
3. y = 0 при x = 0. Два промежутка знакопостоянства $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$

   для $x \in (-\infty;0) \Rightarrow y < 0$; для $x \in (0;+\infty) \Rightarrow y > 0$

4. Найдем производную данной функции:

$y' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1+x)$

$y' = 0$ при x = -1. Эта точка делит область определения функции на два промежутка $(-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$



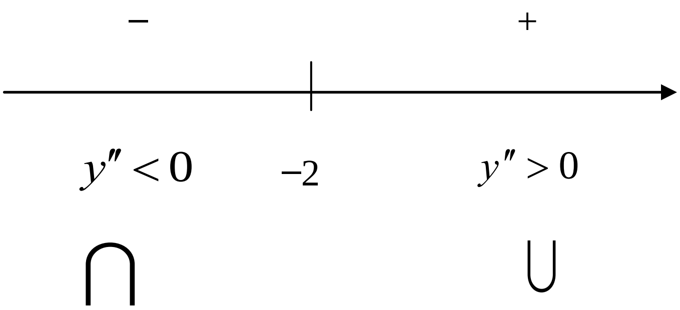
Исследуемая функция на промежутке $(-\infty;-1)$ убывает, а на промежутке $(-1;+\infty)$ возрастает.

Точка x = -1 – точка минимума $y_{\min}(-1) = -\dfrac{1}{e}$

5. Найдем вторую производную данной функции:

$$y'' = (e^x)' \cdot (1+x) + e^x \cdot (1+x)' = e^x \cdot (1+x) + e^x = e^x \cdot (2+x)$$

$y'' = 0$ при x = -2

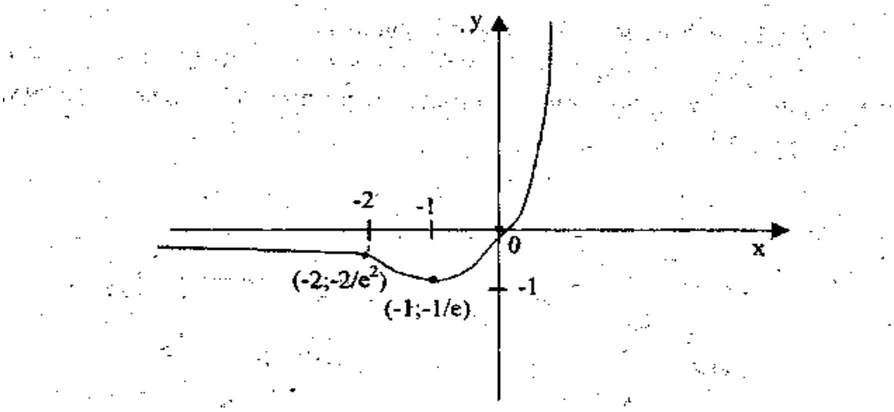


для $x \in (-\infty;-2) \Rightarrow y'' < 0$, следовательно, график функции на этом интервале выпуклый вверх.

для $x \in (-2;+\infty) \Rightarrow y'' > 0$ следовательно, график функции на данном интервале выпуклый Вниз.

X = -2 – точка перегиба, $y_{пер}(-2) = -2 \cdot e^{-2} = -\dfrac{2}{e^2}$

6. По полученным данным строим график



Интегральное исчисление.

Таблица интегралов

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg x + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int tgxdx = \ln\left\|\cos x\right\| + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int ctgxdx = \ln\left\|\sin x\right\| + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin xdx = -\cos xdx$	10. $\int e^x\,dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos xdx = \sin xdx$	11. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	

Свойства неопределённого интеграла.

1. $\int dF(x) = F(x) + C$;
2. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx,\ \alpha \neq 0$ – т. е. постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла.
3. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, т. е. неопределённый интеграл от суммы функций равен сумме неопределённых интегралов от этих функций.

$$\text{Если} \int f(x)dx = F(x) + C, \text{то} \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{где}\ a \neq 0.$$

Неопределённый интеграл. Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример : Вычислите $\int (x^3 - 3x + \sin x)dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла, а затем применим 1 и 4 табличные интегралы:

$$\int (x^3 - 3x + \sin x)dx = \int x^3 dx - 3\cdot\int xdx + \int \sin xdx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} - \cos x + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}\cdot x^2 - \cos x + C$$

Пример : Вычислите $\int \frac{3+2x-x^2}{x}dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы

$$\int \frac{3+2x-x^2}{x}dx = \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{2x}{x}dx - \int \frac{x^2}{x}dx = 3\cdot\int \frac{dx}{x} + 2\cdot\int dx - \int xdx = 3\ln x + 2x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + c$$

Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Пример : Вычислите $\int (3x-4)^3 dx$

Решение: Введем новую переменную *t* = *3x-4*, тогда $dt = t'\cdot dx = (3x-4)'\cdot dx = 3dx$, откуда $dx = \frac{dt}{3}$. Подставим новую переменную в интеграл

(вместо выражения *3x-4* подставим *t*, вместо dx подставим $\frac{dt}{3}$).

$$\int (3x-4)^3 dx = \int t^3\cdot\frac{dt}{3} = \frac{t^4}{12} + C$$

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо t подставим выражение $3x$-4), получим окончательный ответ.

$$\int (3x-4)^3 dx = \frac{(3x-4)^4}{12} + C$$

Определённый интеграл. Методы интегрирования.

Непосредственное интегрирование

Формула Ньютона – Лейбница: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(x)|\,_a^b = F(b) - F(a)}$.

Пример: Вычислить определённый интеграл: $\int_1^4 x^2 dx$.

Решение. $\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ |_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21.$

Метод замены переменной (метод подстановки)

Пример № 1: Вычислить интеграл $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$.

Решение. Применим подстановку $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2, dx = 2tdt$.

Находим новые пределы интегрирования:

x	*1*	*9*
t=$\sqrt{x}$	*1*	*3*

Тогда получим: $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2tdt}{5+2t} = \int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5} dt = \int_1^3 1 - \frac{5}{2t+5} dt = t|\,_1^3 - 5 \cdot \frac{1}{2}\ln|2t+5|\ |_1^3 = 2 - \frac{5}{2} ln \frac{11}{7}$.

*Пример № 2:*Вычислить интеграл $\int_2^3 x(3-x)^7 dx$.

Решение. Полагая $t = 3 - x$, получим: $x = 3 - t, dx = -dt$. Пределы интегрирования:

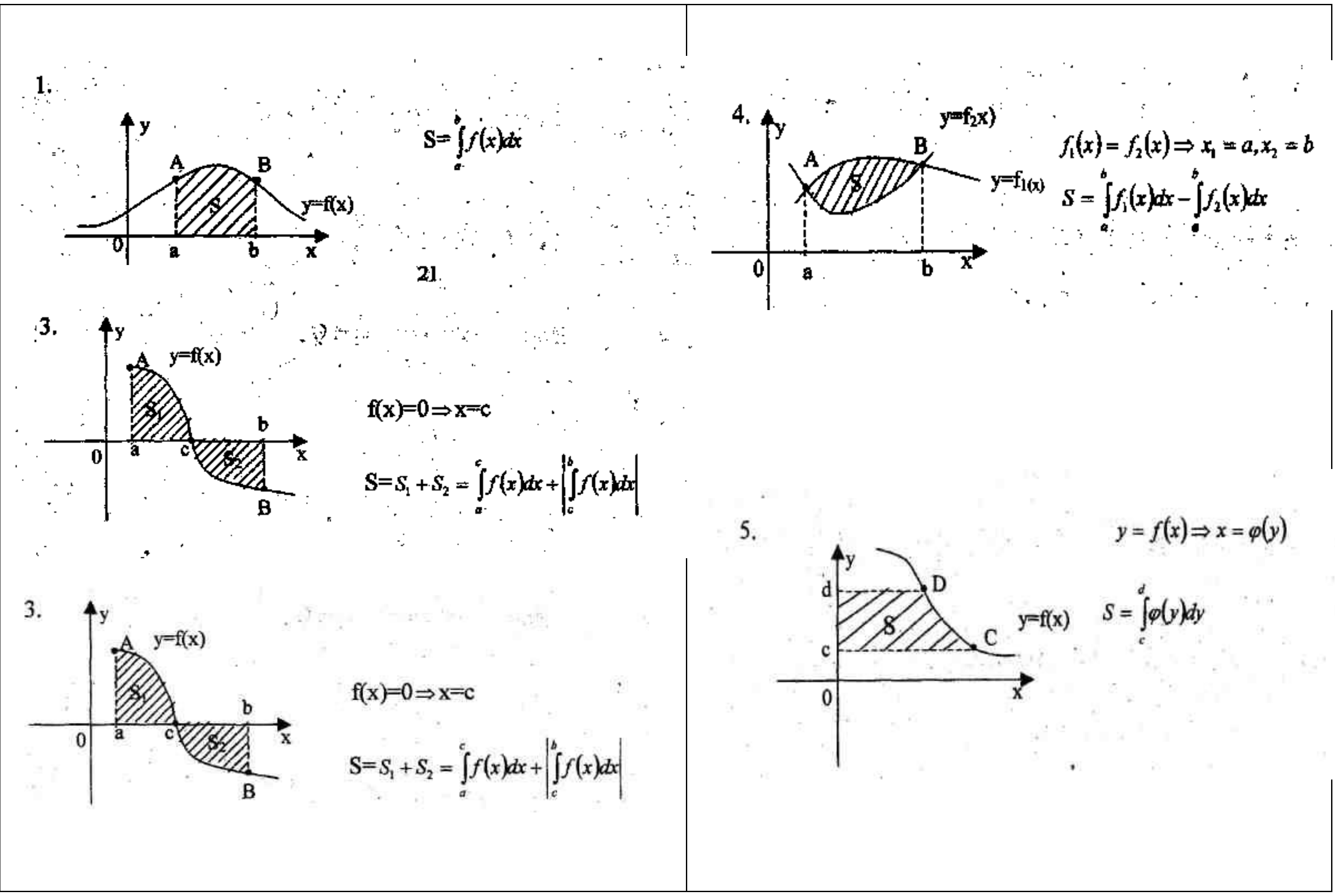
x	*2*	*3*
t	*1*	*0*

$$\int_2^3 x(3-x)^7dx = \int_1^0 (3-t)t^7(-dt) = \int_1^0 (t^8-3t^7)dt = \left(\frac{t^9}{9}-\frac{3}{8}t^8\right)\Big|_1^0 = -\frac{1}{9}+$$

$$+\frac{3}{8} = \frac{19}{72}.$$

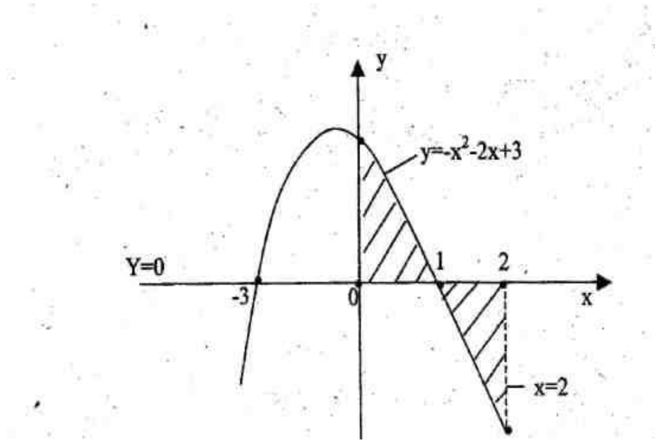
<u>Нахождение площади криволинейной трапеции.</u>

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y=f(x)*, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:



Пример 4: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой *x=2*.

Решение: Построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ох: $y=-x^2-2x+3$, $-x^2-2x+3=0$,

$x_1=1$, $x_2=-3$

$$S=\int_0^1(-x^2-2x+3)dx-\int_1^2(-x^2-2x+3)dx=\left.\left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\right|_0^1+\left.\left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\right|_1^2=$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-\left(-\frac{8}{3}-4+6\right)+\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{12}{3}=4(кв.ед.)$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную *x*, искомую функцию *y* и её производные или дифференциалы. Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным,* если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или *интегралом)* дифференциального уравнения называется такая функция, котороая обращает это уравнение в тождество.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

Пример № 1 Найти общее решение уравнения $x(1 + y^2)dx = ydy$.

<u>*Решение.*</u> Разделим переменные, разделив обе части уравнения на $(1 + y^2)$. Получим:

$$xdx = \frac{ydy}{1+y^2}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{1+y^2}.\ \text{Получаем}\ \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + \frac{1}{2}lnC.$$

Так как произвольная постоянная С может принимать любые числовые значения. То для удобства дальнейших преобразований вместо С мы написали $\frac{1}{2}lnC$. Потенцируя последнее равенство, получим $x^2 = \ln[C(1 + y^2)]$. Это и есть общее решение данного уравнения.

<u>*Ответ.*</u> $x^2 = \ln[C(1 + y^2)]$

Пример № 2. Найти частное решение уравнения $s\,tgtdt + ds = 0$, удовлетворяющее начальным условиям *s=4* при *t*=$\frac{\pi}{3}$.

Решение. Разделив переменные, (поделив обе части уравнения на s) имеем

$$tgtdt + \frac{ds}{s} = 0.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int tgtdt + \int \frac{ds}{s} = lnC\,; \ \ -lncost + lns = lnC,$$

$$\text{или } lns = lnC + lncost,$$

тогда $s = Ccost.$ Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной С подставим значения $t=\frac{\pi}{3}$ и $s=4$ в выражение для общего решения: $4 = Ccos\frac{\pi}{3}$, или $4 = \frac{C}{2}$, откуда $C=8$.

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $s = 8cost.$

Ответ. $s = 8cost.$

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0, (*)$$

Где p и q – постоянные величины.

Для отыскания общего решения данного уравнения составляется *характеристическое уравнение*

$$r^2 + pr + q = 0, (**)$$

Которое получается из исходного заменой: $\frac{d^2y}{dx^2} = r^2, \frac{dy}{dx} = r, y=1.$

Тогда общее решение дифференциального уравнения (*) строится в зависимости от корней r_1 и r_2 характеристического уравнения (**). Здесь возможны три случая.

1 случай. Корни r_1 и r_2 – действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения (*) имеет вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

2 случай. Корни r_1 и r_2 – действительные и равные: $r_1 = r_2 = r$. Тогда общее решение уравнения (*) записывается так:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}.$$

3 случай. Корни r_1 и r_2 – комплексно-сопряжённые: $r_1 = \alpha + \beta i$; $r_2 = \alpha - \beta i$. В этом случае общее решение уравнения (*) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример №1. Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$r^2 - 7r + 10 = 0;\ r_1 = 2,\ r_2 = 5.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные (***1 случай***) и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения записывается следующим образом:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

Ответ. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$

Пример №2. Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$r^2 - 8r + 16 = 0;\ r_1 = r_2 = 4.$$

Так как корни характеристического уравнения равные и действительные (***2 случай***), то общее решение данного дифференциального уравнения записывается следующим образом:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{4x}.$$

Ответ. $y = (C_1 + C_2 x) e^{4x}.$

Пример №3. Решить уравнение $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$r^2 - 6r + 25 = 0;\ r_1 = 3+4i;\ r_2 = 3-4i.$$

Так как корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые (***3 случай***), где $\alpha = 3$, $\beta = 4$, то общее решение данного дифференциального уравнения записывается следующим образом:

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Ответ. $y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Пример №4. Найти частное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} = 0$, если $y = 1$ и $\frac{dy}{dx} = -1$ при $x = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$r^2 - 5r = 0;\ r_1 = 0,\ r_2 = 5.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные (***1 случай***) и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения записывается следующим образом:

$y = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{5x}$, т. е. $y = C_1 + C_2 e^{5x}$.

Для нахождения искомого частного решения нужно определить значения постоянных C_1 и C_2. Подставив в общее решение значения $x = 0$, $y = 1$(из условия), получим $1 = C_1 + C_2$.

Продифференцировав общее решение и подставив в полученное выражение значения $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = -1$(из условия), имеем $\frac{dy}{dx} = 5C_2 e^{5x}$; т. е. $-1 = 5C_2$. Отсюда находим: $C_2 = -\frac{1}{5}$, $C_1 = 1 - C_2 = \frac{6}{5}$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}e^{5x}$.

Ответ. $y = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}e^{5x}$.

Пример №5. Найти частное решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = 0$, если $y = 1$ и $y' = 1$ при $x = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$r^2 + 8r + 16 = 0;\ r_1 = r_2 = -4.$$

Так как корни характеристического уравнения равные и действительные (***2 случай***), то общее решение данного дифференциального уравнения записывается следующим образом:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-4x} = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}.$$

Дифференцируя общее решение, имеем

$$y' = -4C_1e^{-4x} + C_2e^{-4x} - 4C_2xe^{-4x}.$$

Подставив начальные данные в выражения для y и y', получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = C_1e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0, \\ 1 = -4C_1e^0 + C_2e^0 - 4C_2 \cdot 0 \cdot e^0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -4C_1 + C_2 \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$C_1 = 1, C_2 = 5.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y = e^{-4x} + 5xe^{-4x}$.

Ответ. $y = e^{-4x} + 5xe^{-4x}$.

Список использованной литературы

Основные источники:

1. Математика: учебник / А. А. Дадаян. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 544 с. – (Среднее профессиональное образование)
2. Богомолов Н.В., Самойленко Г.И. Математика-М.:Дрофа, 2002
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике-М.:Высшая школа, 2002
4. Баврин И.И., Высшая математика (учебник)-М.:Академия, Высшая школа, 2001

5. Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов - http://school_collection.edu.ru/collection/matematika

Дополнительные источники:

1. Баврин И.И. Общий курс высшей математики / И.И. Баврин, В.Л. Матросов. - М.: Просвещение. – 1995. – 608 с.

2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учеб. пособие для студентов втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. школа. - 1980. – 320 с.

3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2: Учеб. пособие для студентов втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. школа. - 1980. — 365 с.

4. Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федерова Н.Е. и др. под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2012.

5. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 11 кл. – М., 2011.